

Серия 2(б): плюс арифметика.

1. $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что при всех натуральных n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ – также целое.
2. Докажите, что каждое натуральное число
 - а) можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи F_k с номерами $k \geq 2$, среди которых нет последовательных,
 - б) и притом единственным образом.
3. Докажите, что длина n -звенной ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.
4. Докажите тождество $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ (F_k – k -ое число Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ при всех натуральных k).
5. Какое наибольшее количество попарно взаимно простых чисел можно выбрать из чисел от 1 до 50?
6. а) Докажите, что дробь $\frac{65n+12}{39n+7}$ несократима при всех натуральных n .
б) Найдите все натуральные числа, на которые при натуральных n может быть сократима дробь $\frac{5n+6}{8n+7}$.
7. Докажите, что каждые два последовательных числа Фибоначчи взаимно просты.
8. Докажите, что при любых натуральных $a > 1$ и n число $a^n - 1$ делится на $a - 1$.