

Серия 55: уравнения и неравенства

1. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 100$
 - а) в натуральных,
 - б) в целых неотрицательных числах?
2. Докажите, что $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$.
3. $a, b > 0$, $a^2 + b^2 = 6ab$. Найдите $\frac{a+b}{a-b}$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} xy + yz = 2 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$
5. Аня и Ваня учатся считать. Аня называет какое-нибудь число, а Ваня называет число в полтора раза большее, если такое число целое, а если оно не целое, то округляет до целого с избытком. Например, из числа 5 получается число 8. Затем Аня проделывает ту же самую операцию с числом, которое назвал Ваня, и так далее. Может ли у них получиться а) пять, б) десять нечётных чисел подряд?
6. Среди ста действительных членов Великой академии Лапуты имеется a_k членов, возраст которых не меньше k лет ($k = 1, 2, 3, \dots$). Определите средний возраст академика.
7. Шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.