

Серия 53, с древней мудростью.

Град ионийский Милет воскормил и воздвигнул Фалеса,
В мудрости старшего всех, в звезды вперяющих ум.

1. (Теорема Фалеса)

а) Докажите рассмотрением площадей, что если два отрезка, отсекаемые тремя параллельными прямыми на одной из сторон угла, находятся в данном отношении, то отрезки, отсекаемые ими на другой стороне угла, находятся в том же отношении (мы предполагаем, что прямые пересекают обе стороны угла);

б) Докажите без помощи площадей, что если два отрезка, отсекаемые тремя параллельными прямыми на одной из сторон угла, равны, то отрезки, отсекаемые ими на другой стороне угла, также равны;

в) Докажите без помощи площадей, что если два отрезка, отсекаемые тремя параллельными прямыми на одной из сторон угла, находятся в данном рациональном отношении, то отрезки, отсекаемые ими на другой стороне угла, находятся в том же отношении.

2. (Теорема Вариньона, 1731) Докажите, что а) фигура, образованная путем последовательного соединения середин сторон четырехугольника является параллелограммом, и б) его площадь равна половине площади четырехугольника.

3. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей могло остаться без галош?

4. На белом листе клетчатой бумаги нарисовали квадрат размером 12×12 . Две клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона. Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую закрашенную клетку число ранее закрашенных ее соседей. Чему будет равна сумма всех чисел, когда будут закрашены все клетки?

5. Решите в целых числах уравнение $a^2 + 2ab + 2b^2 = 13$.

6. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходит 6 человек. Оказалось, что любые два ученика ходят ровно в один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

7. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольной таблице 100×200 так, чтобы в любом квадрате 3×3 , содержащемся в этой таблице, было хотя бы две отмеченные клетки?