

Серия 4(с): и немножко графов.

1. В клубе “Липонеум” у каждого члена ровно один друг и ровно один враг.
 - а) Докажите, что в этом клубе четное число джентльменов.
 - б) Докажите, что этот клуб можно распустить, составив из его членов два клуба так, чтобы внутри новых клубов не было ни друзей, ни врагов.
2. Министерство правды (миниправ) решило снабдить 77 джентльменов телефонами так, чтобы у каждого джентльмена была связь ровно с 13 другими. Докажите, что миниправ взял на себя непосильную задачу.
3. В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше – карабасов или барабасов?
4. Докажите, что число 202320232023 не является суммой трех точных квадратов.
5. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел от 1 до 100 так, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 26?
6. $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ — натуральное число. Докажите, что $A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.
7. Докажите, что $1^n + 2^n + \dots + 100^n$ делится на 101 при всех нечетных n .
8. Решите в целых числах уравнение $19x^3 - 84y^2 = 1984$.