Серия 3(b): разнородная техника.

1. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, N$. Для каждого подмножества берётся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найдите сумму всех таких обратных величин.

2. В прямоугольнике $3\times n$ расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

3. Пусть p_n – n-е простое число ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$). Докажите, что $p_n > 3n$ при всех $n > 12$.

4. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{100}\underbrace{55\ldots55}_{99}6$ – точный квадрат.

5. В вершинах выпуклого 65-угольника написаны различные натуральные числа, каждое из которых не превосходит 1977. Докажите, что найдутся две диагонали, для которых разности чисел, написанных у их концов, одинаковы.

6. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

7. На доске написано целое положительное число. Число разрешено увеличивать на треть или на одну пятую его значения. Докажите, что, в каком бы порядке ни проделывались эти операции, число на доске рано или поздно перестанет быть целым.

8. В графстве имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному джентльмену. В один прекрасный день каждый джентльмен переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один джентльмен). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.