Серия 1(c), вступительная.

1. На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычёркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятёрку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятёрок могли получить ученики Марии Ивановны?

2. Точки P и Q лежат в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором две наибольшие стороны противоположны и равны. Для каждой из этих двух точек посчитали сумму расстояний до вершин четырехугольника. Докажите, что эти суммы отличаются не больше чем в 2 раза.

3. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик – хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: "Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей – двоечники", а каждый мальчик сказал: "Среди знакомых мне девочек не менее половины – троечницы". Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 10 мальчиков – двоечники. Какое наименьшее число девочек может быть троечницами?

4. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен d. Может ли наибольший собственный делитель $n+2$ равняться $d+2$? (*Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа.)

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что $AK \parallel BC$. Докажите, что $AB > BC$.

6. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено?

7. В строку выписаны 2011 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 21-го числа равна 37, а сумма цифр 54-го равна 7. Найдите сумму цифр 2011-го числа.

8. Натуральные числа x и y меньше 2009. Известно, что x делится на 54, y делится на 31, $x+y$ делится на 85. Докажите, что $x-y$ делится на 23.

9. Саша задумал 20 натуральных чисел и вычислил все возможные произведения, составленные из двух задуманных чисел. Получилось 190 произведений. Докажите, что среди этих произведений найдутся 20, которые оканчиваются одной и той же цифрой.

10. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM в точке P. Оказалось, что $BK = 2PM$. Докажите, что $AK = AP$.