

Задачи 20 сентября.

1. (А.Турэ (1863-1922)). Пусть $n > 1$ – натуральное число. Тогда для каждого натурального a , взаимно простого с n , существуют такие натуральные $x \leq \sqrt{n}$, $y \leq \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$.
2. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины α против часовой стрелки. Для каждого натурального k кузнечик помечает точку, в которую он попадает на k -м прыжке, числом k . Кузнечик сделал n прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами a и b . Докажите, что $a + b \leq n$.
3. Докажите, что для некоторого натурального n десятичная запись числа 2^n начинается с цифр 2024.
4. Дано натуральное D , не являющееся точным квадратом.
 - а) Докажите, что для некоторого натурального C существует бесконечно много пар натуральных чисел (x, y) , удовлетворяющих неравенству $|x^2 - Dy^2| \leq C$.
 - б) Докажите, что уравнение $x^2 - Dy^2 = 1$ имеет решение в натуральных числах.