Серия 2(b), популярная.

1. На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

2. Дано натуральное число n, a и b – его натуральные делители, причем $a<b$. Докажите, что выполняется следующее равенство:

$$\left[\frac{n}{a+1}\right]+\left[\frac{n}{a+2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{b}\right]=\left[\frac{n}{\frac{n}{b}+1}\right]+\left[\frac{n}{\frac{n}{b}+2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{\frac{n}{a}}\right].$$

3. p – простое нечетное число. Дано $p-1$ целых чисел, не делящихся на p. Докажите, что, заменив некоторые из них на противоположные, можно получить $p-1$ чисел, сумма которых делится на p.

4. Пусть $n>2$ – натуральное число. Назовём множество S натуральных чисел *всеобъемлющим*, если для любого натурального $r<n$ в S можно указать несколько элементов, сумма которых даёт остаток r при делении на n. Докажите, что из любого всеобъемлющего множества можно выбрать всеобъемлющее подмножество, содержащее не более $n-1$ элемента.

5. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

6. Все натуральные числа раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы для каждого натурального k бесконечно много чисел этого цвета делилось на k.

7. Числа от 1 до $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Докажите, что множества остатков попарных сумм чисел каждой группы при делении на $2n$ совпадают (во множество попарных сумм входят выражения вида $a+a$).