1. Пусть m – натуральное число, p – простое число. Докажите, что

$$\sum_{\substack{x \bmod p \\ x \not\equiv 0 \bmod p}} x^m \equiv \begin{cases} 0 \pmod p, & \text{если } m \text{ не делится на } p-1, \\ -1 \pmod p, & \text{если } m \text{ делится на } p-1. \end{cases}$$

2. Найдите все такие простые числа p и q, что 2^p+1 делится на q, а 2^q+1 делится на p.

3. Докажите, что не существует натурального числа $n>1$, для которого 2^n-1 делится на n.

4. Пусть p и q – натуральные числа такие, что $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажите, что число p делится на 1979.

5. а) (Эйлер) Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

б) Докажите, что оно имеет бесконечно много решений в целых отрицательных числах x, y, z.

6. Число $1/1997$ представили в виде периодической десятичной дроби. Докажите, что в (наименьшем) периоде этой дроби не более 200 семерок.

7. Пусть $\alpha^2 \equiv -1 \pmod n$.

а) Докажите, что существует не более двух решений уравнения $x^2+y^2=n$ во взаимно простых числах x и y, для которых $x \equiv \alpha y \pmod n$.

б)* Докажите, что существуют ровно два таких решения.

8. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием "обобщенной теоремы Вильсона") Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m, и установите, какой знак соответствует каждому m.