1. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1+k)(b_2+k)\ldots(b_n+k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)

2. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n ($n > 1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

3. а) При каких натуральных m число $31^m - 1$ делится на 2^m? б) Докажите, что для любого нечетного a существует лишь конечное число натуральных m таких, что $a^m - 1$ делится на 2^m.

4. *Континуанта*, или *скобки Эйлера* $E(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ – это сумма всех мономов, получающихся выкидыванием некоторого (возможно, пустого) набора непересекающихся пар x_i, x_{i+1} из произведения $x_0 x_1 \ldots x_n$ (пустое произведение считается равным 1).

а) Сколько мономов входит в $E(x_0, x_1, \ldots, x_n)$?

б) Докажите, что $E(x_0, x_1, \ldots, x_n) = E(x_n, x_1, \ldots, x_0)$.

в) Докажите, что $E(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}E(x_0, x_1, \ldots, x_n) + E(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

г) Докажите, что $E(x_0, x_1, \ldots, x_n)E(x_1, \ldots, x_{n-1}) - E(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})E(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{n-1}$.

5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - y^4 = z^2$.

6. Натуральные числа a, b и $n > 1$ таковы, что $(a+b)^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

7. Натуральные числа x и y, большие 1, таковы, что $x^2 + y^2 - 1$ делится на $x + y - 1$. Докажите, что $x + y - 1$ – составное число.