Серия 2: многабукаф.

1. (Теорема Дирихле об одновременном однородном приближении). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – вещественные числа, N натурально. Докажите, что существуют такие целые $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и натуральное $q \leqslant N^k$, что $|q\alpha_1 - p_1| \leqslant \frac{1}{N}, |q\alpha_2 - p_2| \leqslant \frac{1}{N}, \ldots, |q\alpha_n - p_n| \leqslant \frac{1}{N}$.

2. (Теорема Ламе.) К натуральным числам a и b, $a > b$, применяется алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя этих чисел. Докажите, что число делений с остатком не превосходит $5p$, где p – количество цифр в десятичной записи числа b.

3. На клетчатой бумаге нарисован треугольник с вершинами в узлах. Внутри него содержится ровно один узел. Какое наибольшее количество узлов может лежать на его границе?

4. Положение о Всероссийской олимпиаде требует, чтобы дипломами было награждено (строго) меньше 45% участников олимпиады. На олимпиаду 2100 г. прибыло более 20 участников, и жюри вручило дипломы в соответствии с Положением. Ознакомившись с протоколом, Большие Начальники сказали, что результаты олимпиады низкие, так как доля награждённых заметно отличается от 45%. Жюри ответило, что доля награждённых и так была максимально возможной на этой олимпиаде и даже на любой олимпиаде с меньшим числом участников. Тогда Большие Начальники приказали к 2101 г. увеличить число участников с тем, чтобы доля награжденных стала хотя бы в два раза ближе к 45%.

а) Докажите, что количество участников потребуется увеличить хотя бы вдвое.

б) При каком наименьшем M заведомо можно будет исполнить распоряжение Больших Начальников, увеличив число участников не более, чем в M раз?

5. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами принимает в p подряд идущих целых точках значения, являющиеся полными квадратами (p – простое число, $p \geqslant 5$). Докажите, что $b^2 - 4ac$ делится на p.

6. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 5 = y^3$.

7. Последовательность $r_1, r_2, \ldots$ составлена по закону: $r_1 = 1; r_{n+1} = \frac{r_n + \frac{2}{r_n}}{2}$. Представим r_k в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Докажите, что при всех $k \geqslant 2$ справедливы неравенства $0 < \frac{p}{q} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}q^2}$.