1. Пересечение двух кривых третьего порядка состоит ровно из 9 точек. Докажите, что если какая-нибудь кривая третьего порядка проходит через 8 из этих точек, то она проходит и через девятую.

2. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют равенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,\ y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1,\ x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Докажите, что $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \leqslant n$.

3. а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Докажите, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n), что $f(x - m, y - n) = (x - m)^2 + (x - m)(y - n) + (y - n)^2 \leqslant 1/2$.

б) Обозначим через $\overline{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x-m, y-n)$ при всех целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что для всех целых x и y выполнено неравенство $\overline{f}(x, y) \leqslant 1/2$.

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\overline{f}(x, y) \leqslant 1/3$. Найдите все точки, для которых достигается неравенство $\overline{f}(x, y) = 1/3$.

в) Рассмотрим функцию $f_a(x, y) = x^2+axy+y^2$ $(0 \leqslant a \leqslant 2)$. Найдите какое-либо число c, зависящее от a, так, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство $|\overline{f_a}(x, y)| \leqslant c$. Постарайтесь найти точную оценку.

4. Пусть $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $x_i + y_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $(1 - x_1x_2 \ldots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \ldots (1 - y_n^m) \geqslant 1$ для любых натуральных m и n.

5. Как расположить в пространстве спичечный коробок, чтобы его проекция на плоскость имела наибольшую площадь?

6. а) Докажите, что в n-мерном пространстве существует не более $n + 1$ аффинно независимых точек.

б) Докажите *теорему Радона:* любое конечное множество X в n-мерном пространстве, содержащее не менее $n+2$ точек, можно разбить на две части Y и Z так, что выпуклые оболочки Y и Z будут иметь общие точки.