Задачи от 19 сентября.

1. а) По кольцевой беговой дорожке длиной 1 бегает спортсмен с постоянной длиной шага и нулевым размером обуви. Как только спортсмен оторвал ногу от точки старта, злоумышленник выкопал маленькую ямку с центром в этой точке. Докажите, что если спортсмен будет бегать достаточо долго, его нога попадёт в ямку.

б) (Дирихле) Пусть α – вещественное, а N – натуральное число. Докажите, что существуют такие целые числа p, q, $0 < q \leqslant N$, для которых $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{Nq}$.

2. Пусть $d(n)$ – число натуральных делителей n и $e(n) = \left[\frac{2000}{n}\right]$. Докажите, что

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(2000) = e(1) + e(2) + \ldots + e(2000).$$

3. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $m, n \leqslant 1000$ и $\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$?

4. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ (m и n – натуральные числа). Докажите, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

5. Даны два различных положительных числа a и b. Докажите, что на числовой прямой найдутся два числа на расстоянии $\frac{1}{\max\{a,b\}}$ такие, что любое x, находящееся между этими числами, удовлетворяет уравнению $[ax + b] = [bx + a]$.

6. Числа a, b, c, d, e и f – натуральные. Известно, что $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{e}{f}$, $af - be = 1$. Докажите, что $d \geqslant b + f$.