1. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием "обобщенной теоремы Вильсона") а) Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m, и б) установите, какой знак соответствует каждому m.

2. а) Докажите, что $2^{3^{100}} + 1$ делится на 3^{101}, и б) не делится на 3^{102}.

3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = z^4$ не имеет решений в натуральных числах.

4. Как известно, уравнение $x^2 - Dy^2 = 1$ имеет решение в натуральных числах при любом натуральном D, не являющемся точным квадратом. Докажите, что при простом $p = 4k + 1$ уравнение $x^2 - py^2 = -1$ также имеет решение в натуральных числах.

5. a и m – натуральные числа, x – целое число такое, что $a^2x - a$ делится на m. Докажите, что для некоторого целого y оба числа $a^2y - a$ и $ay^2 - y$ делятся на m.

6. Простое число p двумя способами представлено в виде суммы двух квадратов натуральных чисел: $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Докажите, что $a = c$ или $a = d$.

7. Целые числа x и y удовлетворяют условию $9x^2 + 6xy - 6y^2 = x - y$. Докажите, что число $x - y$ – квадрат целого числа.