Серия 1(b): в основном комбинаторная арифметика.

1. Решите уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ в целых числах.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы точного квадрата и числа, записываемого только нулями, единицами и двойками.

3. Дано простое число p и целое a, не кратное p. Назовём два ненулевых вычета x и y $\bmod p$ *эквивалентными*, если $x \equiv a^k y$ для некоторого натурального k.

а) Докажите, что полученное отношение – отношение эквивалентности.

б) Докажите, что во всех классах эквивалентности поровну элементов.

в) Выведите из последнего утверждения малую теорему Ферма.

4. Докажите, что количество решений уравнения $x^3 + y^2 = z^3 + t^2 + 1$ в натуральных числах, не превосходящих 10^6, меньше, чем количество решений уравнения $x^3 + y^2 = z^3 + t^2$ в натуральных числах, не превосходящих 10^6.

5. Даны k различных натуральных чисел, не кратных данному простому p. Докажите, что всевозможные суммы этих чисел (в сумму может входить от 1 до k из наших чисел) дают не менее k разных остатков при делении на p.

6. Для каждого числового множества X определим $X' = \{s-t | s, t \in X, s \neq t\}$. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$. Рассмотрим два множества $A, B \subset S$ такие, что $|A| \cdot |B| \geqslant 3999$. Докажите, что $A' \cap B' \neq \varnothing$. (Через $|G|$ обозначается количество элементов множества G.)

7. Пусть N – число решений неравенства $x^2 + y^2 < n^2$ в целых числах (n – данное натуральное число). Докажите, что $N \geqslant 3(n-1)^2$.