1. Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1000000: представимых в виде суммы шести шестых степеней натуральных чисел или не представимых в таком виде?

2. Докажите, что сумма всех квадратичных вычетов по простому модулю $p > 3$ кратна p.

3. Докажите, что уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от 0.

4. Докажите, что для каждого натурального n существует бесконечно много k таких, что $k \cdot 2^n - 7$ – точный квадрат.

5. Возрастающая арифметическая прогрессия с натуральными членами содержит точный квадрат и точный куб. Докажите, что она содержит точную шестую степень а) если члены прогрессии взаимно просты с разностью; б) в общем случае.

6. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и простое число p.

а) Докажите, что для любого целого a многочлен $f(x)$ можент быть представлен в виде $f(x) = (x - a)g(x) + r$ для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами и некоторого целого r.

б) Докажите, что если $f(a) \equiv 0 \pmod p$, то $f(x) \equiv (x - a)g(x) \pmod p$ для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами (сравнение тождественное, то есть соответствующие коэффициенты левой и правой части должны быть сравнимы $\bmod p$).

в) Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – попарно несравнимые $\bmod p$ корни многочлена $f(x)$, то

$$f(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)g_k(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g_k(x)$ с целыми коэффициентами (сравнение также тождественное).

г) Докажите, что многочлен степени $n > 0$ может иметь не более n корней $\bmod p$.

7. Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.

8. Докажите, что если сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod p$ с простым p имеет единственное решение, то все вычеты $\bmod p$ являются кубами.