1. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ производит в ней перестановку. Как зависит от a чётность этой перестановки?

2. Пусть M – множество значений многочлена x^2+1 в целых точках. Докажите, что множество M не содержит ни одной бесконечной (непостоянной) геометрической прогрессии.

3. Докажите, что если числа $m, n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{7} - m/n > 0$, то $\sqrt{7} - m/n > 1/mn$.

4. Дано простое p.

а) Докажите, что если a и b принадлежат $\mathrm{mod} p$ к взаимно простым показателям m и n, то ab принадлежит к показателю mn.

б) Пусть q – простой делитель $p-1$. Докажите (не пользуясь существованием первообразного корня), что $a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ для некоторого $a \not\equiv 0 \pmod{p}$.

в) Докажите, что если $p-1$ делится на q^k, то существует вычет, принадлежащий к показателю $q^k \bmod p$.

г) Выведите отсюда существование первообразного корня $\mathrm{mod} p$.

5. Существуют ли такие квадратные трехчлены P, Q, R, что для любых целых x и y найдется целое z, удовлетворяющее равенству $P(x)+Q(y)=R(z)$?

6. *Континуанта*, или *скобки Эйлера* $E(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ – это сумма всех мономов, получающихся выкидыванием некоторого (возможно, пустого) набора непересекающихся пар x_i, x_{i+1} из произведения $x_0 x_1 \ldots x_n$ (пустое произведение считается равным 1).

а) Докажите, что $E(x_0, x_1, \ldots, x_n) = E(x_n, x_1, \ldots, x_0)$.

б) Докажите, что $E(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1} E(x_0, x_1, \ldots, x_n) + E(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

в) Докажите, что $E(x_0, x_1, \ldots, x_n) E(x_1, \ldots, x_{n-1}) - E(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) E(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{n-1}$.

г) Докажите, что $\frac{E(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{E(x_1, \ldots, x_n)} = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \ldots + \frac{1}{x_n}}}$.

7. а) Число n представляется в виде $7n = a^2 + ab + b^2$. Докажите, что число $7n$ представляется в таком же виде.

б) Число $7n$ представляется в виде $7n = a^2 + ab + b^2$. Докажите, что число n представляется в таком же виде.

8. Докажите, что для любого натурального числа n число $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ не делится на 5.