Серия 1: внезапно

1. Дано натуральное $m > 1$ и целые числа a, b, c, d. Докажите, что существуют целые числа x, y, u, v, не превосходящие по модулю $\sqrt{m}$ и не все равные 0, такие, что $ax + by \equiv u \pmod{m}$ и $cx + dy \equiv v \pmod{m}$.

2. Докажите, что если $\frac{p}{q}$ – несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами, то $p - kq$ – делитель $f(k)$ при любои целом k.

3. Пусть p – простое число и $f(x)$ – многочлен степени d с целыми коэффициентами такой, что: (i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$; (ii) для каждого натурального n остаток от деления $f(n)$ на p равен 0 или 1. Докажите, что $d \geqslant p - 1$.

4. Дан многочлен $P(x)$ степени n. Известно, что числа $P(0^2)$, $P(1^2)$, $\ldots$, $P(n^2)$ – целые. Докажите, что для любого целого k число $P(k^2)$ – целое.

5. Функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такова, что

а) если $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \neq n$, то $\frac{f(m)-f(n)}{m-n} \in \mathbb{Z}$;

б) существуют положительные числа A и B и натуральное число N такие, что $|f(n)| \leqslant A|n|^N$, $|n| \geqslant B$, $n \in \mathbb{Z}$.

Докажите, что $f(n) = p(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $p(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами.

6. Пусть a_1, a_2,$\ldots$, a_n – различные целые числа. Докажите, что многочлен а) $(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$ (при $n \geqslant 5$) неприводим над $\mathbb{Z}$.

7. Докажите, что для каждого натурального n существует многочлен P степени не выше n с целыми коэффициентами, такой, что $P(x)$ делится на 2^n для каждого целого четного x, и имеет остаток 1 при делении на 2^n для каждого целого нечетного x.