1. Последовательность (x_n) задана своими первыми двумя членами x_1, x_2 и условием $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - x_{n-1}$. Верно ли, что эта последовательность периодична а) при любых x_1, x_2, не равных одновременно 0; б) хотя бы при каких-нибудь x_1, x_2, не равных одновременно 0?

2. Докажите, что через любые 5 различных точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная кривая второго порядка $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (заданная с точностью до пропорциональности).

3. Найдите n-ю степень матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. На плоскости задано преобразование $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$.

а) Существует ли вектор, который оно переводит в коллинеарный ему? Найдите все такие векторы.

б) Решите задачу 1 снова.

5. Пусть $f(x) \in R[x]$ – многочлен над кольцом R. Разложим многочлен $f(x+h) \in R[x,h]$ по степеням h: $f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + h^2 f_2(x) + \ldots$, или $f(x+h) \equiv f(x) + hf_1(x) \pmod{h^2}$. *Производная* многочлена $f(x)$ (обозначается $f'(x)$) – это многочлен $f_1(x)$. Докажите, что а) $(f+g)' = f' + g'$; б) $(fg)' = f'g + fg'$; в) если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, то $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$; г) если α – корень многочлена f кратности k, то α – корень f' кратности не менее $k-1$.

6. Пусть $x_1, x_2, \ldots,, x_n$ - действительные числа и $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Докажите, что для любого целого числа $k \geqslant 2$ существуют целые числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, не все равные нулю, $|a_i| \leqslant k-1$, $i = 1$, 2, $\ldots,$, n, и такие, что

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

7. Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую – с четной суммой цифр. Докажите, что если $1 < k < n$, то сумма k-х степеней всех чисел первой группы равна сумме k-х степеней всех чисел второй группы.

8. Мы скажем, что для многочлена P задан *узел интерполяции x кратности k*, если заданы условия $P(x) = y$, $P'(x) = y'$, $\ldots$, $P^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}$ на значения этого многочлена и первых $k-1$ его производных в точке x. Докажите, что для любого набора узлов с суммарной кратностью $n+1$ существует единственный многочлен P степени не выше n, удовлетворяющий всем заданным условиям.