Задачи от 18 сентября.

1. Докажите, что $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.
2. Найдите сумму
$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^{k-1}}{2^k}\right]+\ldots$$
3. m и n – натуральные числа, $(m,n)=1$. Найдите сумму
$$\left[1\cdot\frac{m}{n}\right]+\left[2\cdot\frac{m}{n}\right]+\ldots+\left[(n-1)\cdot\frac{m}{n}\right].$$
4. Сколько различных чисел встречается в последовательности $\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right]$?
5. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n существует такое рациональное число x, что $\frac{1}{3}\leqslant\{mx\}\leqslant\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}\leqslant\{nx\}\leqslant\frac{2}{3}$. Через $\{y\}$ обозначается дробная часть числа y.
6. При каком наименьшем n в десятичной записи дроби $\frac{m}{n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ после запятой могут встретиться идущие подряд цифры 501?