

Пусть на множестве  $M$  задано отношение  $\sim$ .

Говорят, что это отношение

- *рефлексивно*, если  $a \sim a$  для любого  $a \in M$ ;
- *симметрично*, если из  $a \sim b$  следует  $b \sim a$ ;
- *транзитивно*, если из  $a \sim b$  и  $b \sim c$  следует  $a \sim c$ .

*Отношение эквивалентности* – это отношение, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Главное, из-за чего мы этим занимаемся, – это следующая теорема.

**Теорема.** Множество  $M$ , на котором задано отношение эквивалентности  $\sim$ , разбивается на *классы эквивалентности*, то есть такие подмножества, что любые два элемента, лежащие в одном подмножестве, эквивалентны, а любые два элемента, лежащие в разных подмножествах, не эквивалентны.

**Доказательство.** Для каждого элемента  $a$  рассмотрим множество  $M_a = \{b \mid b \sim a\}$  всех элементов, эквивалентных ему. Мы докажем, что два таких множества  $M_a$  и  $M_b$ , построенные для двух элементов  $a$  и  $b$ , либо не пересекаются, либо совпадают. Из этого, очевидно, будет следовать и утверждение теоремы – достаточно взять каждое такое множество по одному разу. Поскольку каждый элемент  $a$  лежит в классе  $M_a$  (это рефлексивность:  $a \sim a$ ), вместе классы покроют всё множество  $M$ .

Пусть два множества  $M_a$  и  $M_b$  пересекаются – у них есть общий элемент  $c$ . Это значит, что  $c \sim a$  (и тем самым  $a \sim c$ , в силу симметричности), а также  $c \sim b$ . Из  $a \sim c$  и  $c \sim b$  по транзитивности следует  $a \sim b$ :  $a$  и  $b$  эквивалентны! Теперь уже легко видеть, что  $M_a = M_b$ : если, скажем,  $c \in M_b$ , то есть  $b \sim c$ , то (с учетом  $a \sim b$ ) имеем  $a \sim c$  и  $c \in M_a$ , и наоборот – что и требовалось доказать.

**Пример.** Пусть  $M$  – множество всех прямых на плоскости, и  $\ell \sim m$ , если прямые  $\ell$  и  $m$  параллельны или совпадают. Легко проверить, что это отношение эквивалентности. Получающийся класс эквивалентности называют *направлением*; в один класс с прямой  $\ell$ , кроме неё самой, входят все параллельные ей прямые.

Привычный оборот "провести через точку  $A$  прямую данного направления" теперь можно корректно расшифровать как "провести через  $A$  прямую, параллельную данной".

Наш главный пример относится к сравнениям по модулю.

Зафиксируем натуральное  $m$ ; тогда сравнимость  $\text{mod } m$  – отношение эквивалентности на множестве целых чисел. Образующиеся при этом классы эквивалентности называются *вычетами mod  $m$* ; таким образом, вычет содержит некоторое целое число и все числа, отличающиеся от него на кратное  $m$ .

Говоря о числе решений, например, сравнения  $ax \equiv b \pmod{m}$ , мы имеем в виду не количество чисел, удовлетворяющих этому сравнению (их или вовсе нет, или бесконечно много), а количество вычетов.