

Серия 3(а): раз так хорошо пошло...

1. Решите уравнение $|x - |x - |x - \dots - |x - |x - 1|| \dots || = 0$ (2021 модуль).
2. 2009 школьников решали 6 задач. Преподаватель завел таблицу, в которой против имени каждого школьника отметил плюсом все решенные им задачи. Разглядывая таблицу, он обнаружил, что каждые три школьника вместе решили не менее 5 разных задач. Какое наименьшее количество плюсов может быть в таблице?
3. Произведение положительных чисел a, b, c равно 8. Докажите, что $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})(c + \frac{1}{c}) \geq \frac{125}{8}$.
4. Назовем изящным разбиение натурального числа на слагаемые, каждое из которых является степенью двойки и используется не более двух раз. У каких натуральных чисел количество изящных разбиений четно? (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одно).
5. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d , что $d^2 \leq n < 100d^2$.
6. О натуральных числах a и n известно, что $a^2 + 1$ делится на n . Докажите, что найдется натуральное число b , для которого $b^2 + 1$ делится на $n(n^2 + 1)$.
7. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?
8. Последовательность $\{a_i\}$ задается следующим образом: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 2$. Докажите, что $a_{2n-1} - (-1)^n$ делится на a_n .