Серия 2(b), техническая

1. Пусть a, b, c и d – такие числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.

2. d – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что $a(d-b) + b(d-c) + c(d-a) \leqslant d^2$.

3. Может ли точный квадрат иметь поровну натуральных делителей вида $3k+1$ и $3k+2$?

4. a, b, c, d – вещественные числа, причем $a > b > c > d$. Докажите, что $c < \frac{cd-ab}{c-a+d-b} < b$.

5. Докажите, что если нечетное натуральное число k делится на $[\sqrt{k}]$, то либо k, либо $k+1$ является квадратом целого числа.

6. Докажите, что $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\ddots+\frac{1}{2019}}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\ddots+\frac{1}{2019}}}}} = 1$.

7. Для натуральных чисел x и y число $x^2 + xy + y^2$ в десятичной записи оканчивается нулем. Докажите, что оно оканчивается хотя бы двумя нулями.

8. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 3$, $a_{n+1} = (n+1)a_n - n + 1$ при всех натуральных n. Докажите, что в полном графе с a_n вершинами, все рёбра которого раскрашены в n цветов, существуют три вершины, попарно соединённые рёбрами одного цвета.