Серия 2(а), более арифметичная

1. Сколько различных чисел встречается в последовательности $\left[\frac{1^2}{1980}\right]$, $\left[\frac{2^2}{1980}\right]$, ..., $\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$?

2. Пусть $d(n)$ – число натуральных делителей n и $e(n) = \left[\frac{2000}{n}\right]$. Докажите, что $d(1) + d(2) + \ldots + d(2000) = e(1) + e(2) + \ldots + e(2000)$.

3. Обозначим через $a_{n,k}$ количество способов распределить k конфет среди n детей таким образом, чтобы каждому ребенку досталось не более двух конфет (возможно, ни одной). Вычислите сумму $a_{2007,1} + a_{2007,4} + a_{2007,7} + \ldots + a_{2007,4012}$.

4. Существует ли бесконечное множество натуральных чисел, в котором никакие два числа не являются взаимно простыми, а любые три взаимно просты?

5. (a_n) – бесконечная арифметическая прогрессия с натуральными членами. Докажите, что из последовательности $(1/a_n)$ можно выделить арифметическую прогрессию длины 100.

6. Натуральные числа a, b, c, d, n таковы, что $ab - cd - 1$ делится на n. Докажите, что можно найти числа a', b', c', d', для которых $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$, $d - d'$ делятся на n и $a'b' - c'd' = 1$.

7. Последовательность a_n такова, что $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Докажите, что любые два члена этой последовательности взаимно просты.

8. Сережа делил натуральное число на 2007 и в каком-то месте после запятой получил четыре девятки подряд. Докажите, что он ошибся.