

Серия 2: а теперь комбинаторика

1. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Каждую минуту Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх независимо от того, как Петя выбирает пачки.

2. В двудольном графе степень каждой вершины равна n . Докажите, что его ребра можно разбить на n полных паросочетаний (то есть, существует n способов разбить все вершины графа на пары смежных таким образом, чтобы каждое ребро графа входило ровно в одно такое разбиение).

3. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел равна 1. Разрешается вычесть одно и то же положительное число из любых n клеток, никакие две из которых не стоят в одной строке или в одном столбце. Докажите, что такими операциями можно получить таблицу из одних нулей. (Число и набор клеток заново выбираются для каждой операции.)

4. Вершины некоторого графа правильным образом раскрашены в k цветов, причем их нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречается ровно по одной вершине каждого цвета.

5. В компании из N человек, где каждый имеет хотя бы одного знакомого, у всех поровну знакомых. Докажите, что можно выбрать хотя бы $\frac{N}{3}$ непересекающихся пар знакомых.

6. В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково.

а) Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

б) Могло ли их быть ровно 6?

7. Числа a и $a^3 - 6a$ — различные корни квадратного трехчлена с целыми коэффициентами. При этом число a иррационально. Чему может быть равно a ?

8. Из связного графа диаметра n удалили одно ребро так, что он остался связным. Докажите, что диаметр полученного графа не превосходит $2n$.