Серия 1(b), бодрящая

1. Решите в целых числах уравнение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 33$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $4x^3 - x = y^2$.

3. На доске записаны дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$.

а) Можно ли перед каждой из этих дробей поставить знак “+” или “-” так, чтобы их сумма равнялась нулю?

б) Если нет, то какое наименьшее количество этих дробей надо стереть, чтобы, поставив перед оставшимися дробями знаки “+” или “-”, можно было получить в сумме нуль?

4. В группе из $2n+1$ человек среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее $n+1$ человек из этой группы, у каждого из которых не менее n друзей.

5. Библиотекарь каждую минуту подходит к полке, на которой стоит восьмитомное собрание сочинений, и меняет местами какие-то два соседних тома. Может ли он делать это так, чтобы по истечении некоторого времени оказалось, что все возможные варианты расстановки томов уже реализованы, причем каждый – по разу?

6. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

7. Докажите, что число $1981^{1986} + 30^{1986}$ не является точным квадратом.

8. Назовем натуральное число n *полезным*, если любое натуральное число, меньшее n, можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n. Докажите, что произведение двух полезных чисел – полезное число.