Серия 1(а): техника алгебраическая и арифметическая.

1. С натуральным числом, написанным на доске, разрешается проделать такую операцию: умножить его на выражение $(p-1)^2/p$, где p – его простой делитель, и записать результат вместо исходного числа. Докажите, что, какое бы исходное число мы ни взяли и как бы мы ни проделывали описанные операции, на доске рано или поздно появится число 1.

2. Определим число $n?$ ("эн вопросиал") следующим образом: $1? = 1$, $n? = \frac{n}{(n-1)?}$ для всех $n > 1$. Докажите, что $n? \times n!$ – точный квадрат.

3. Пусть p_n – n-е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n + p_n - 1$ или $n + \pi(n)$.

4. Докажите, что $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ при всех вещественных x.

5. a, b, n – натуральные числа такие, что $(a + 4b)(b + 4a) = 5^n$. Докажите, что n четно.

6. При каком натуральном k величина $k^2/1,001^k$ достигает максимального значения?

7. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ при условии $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 100$.

8. Число 4 обладает тем свойством, что при делении его на q^2 получается остаток меньше $\frac{q^2}{2}$, каково бы ни было q. Перечислите все числа, обладающие этим свойством.