Задачи 26 января.

1. Значение квадратного трехчлена ax^2+bx+c при каждом натуральном x является точным квадратом. Докажите, что ax^2+bx+c является квадратом линейного многочлена.

2. Найдите все целые решения уравнения $x^2+z^2=2y^2$.

3. Найдите все тройки целых неотрицательных x, y, z такие что $7^x+2^y=3^z$.

4. Докажите, что $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

5. Решите в целых числах уравнение $x^4+x^3+x^2+x=y^2+y$.

6. Докажите, что сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ при простом p и a, не кратном p

а) имеет 0 или 3 решения, если p имеет вид $6k+1$;

б) имеет 1 решение, если p имеет вид $6k+5$.

в) Докажите, что простых чисел вида $6k+1$ бесконечно много.

7. Найдите все простые числа p такие, что каждое из чисел $\frac{p+1}{2}$ и $\frac{p^2+1}{2}$ есть точный квадрат.

8. Докажите, что последовательность $a_n=d(n^2+1)$ не является а) строго монотонной, б) нестрого монотонной ни с какого места.

Напомню также, что у нас осталась недобитой старая задача

II.2. Пусть n – натуральное число. Обозначим через P_k количество целых неотрицательных решений уравнения $kx+(k+1)y=n-k+1$. Выразите сумму $P_1+P_2+\ldots+P_n$ через n.