Несколько задач по арифметике

1. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что если при бесконечно многих натуральных k число $k^2 + 2kn + m^2$ является точным квадратом, то $m = n$.

2. Найдите все натуральные n, для которых $n! + 3n^2$ – квадрат натурального числа.

3. Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, $\ldots$, $n! + n$ есть простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

4. О натуральных числах a и n известно, что $a^2 + 1$ делится на n. Докажите, что найдется натуральное число b, для которого $b^2 + 1$ делится на $n(n^2 + 1)$.

5. Найдите все натуральные n такие, что если $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k < d_{k+1} = n$ – все натуральные делители n, то n делится на $d_1 + d_2$ и $d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

6. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leqslant n < 100d^2$.

7. Целое число z и взаимно простые натуральные числа x и y удовлетворяют уравнению $(5z - 4x)(5z - 4y) = 25xy$. Докажите, что одно из чисел $10z + x + y$ или $(10z + x + y)/3$ – точный квадрат.

8. Найдите все простые p, для которых $p^3 + 2p + 1$ – степень двойки.