

Серия 7(в): что мы узнали.

1. a, b, c, d – действительные числа, $ad - bc = 1$. Докажите, что существуют такие целые числа x, y , не равные одновременно 0, что $|ax + by| \leq 1$ и $|cx + dy| \leq 1$.
2. Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, радиус которых равен r . Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.
3. Каждую сторону n -угольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами правильного n -угольника. Докажите, что исходный n -угольник – правильный.
4. Правильный n -угольник вписан в окружность радиуса 1. Найдите произведение расстояний от данной его вершины до всех остальных вершин.
5. Докажите, что в выпуклом $2n$ -угольнике найдется диагональ, не параллельная ни одной из сторон.
6. В компании из 20 человек для любых троих найдётся человек, который знает их всех. Докажите, что найдётся человек, имеющий не менее девяти знакомых.
7. Найдите суммы а) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots + C_n^{4k} + \dots$, б) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots + C_n^{4k+1} + \dots$ в) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} + \dots$
8. В город привезли 200 бочек кваса. Пятеро злодеев подсыпали в одну из бочек яд. Если человек выпивает квас с ядом, то в течение суток он умирает. Злодеи были пойманы, и городские власти хотят выяснить, какие бочки можно пускать в продажу. Для этого они могут давать выпить квас из любой бочки любому злодею. Какое наибольшее число безопасных бочек можно определить за двое суток?