Серия 7(а): напоследок.

1. Алфавит A состоит из n букв. S – множество слов конечной длины, составленных из букв этого алфавита. Известно, что любая бесконечная последовательность букв алфавита A начинается ровно с одного из слов множества S. Докажите, что множество S конечно.

2. Можно ли раскрасить все положительные действительные числа в 10 цветов так, чтобы любые два числа, десятичная запись которых отличается только в одном разряде, были разного цвета? (Десятичные записи, в которых все цифры, начиная с некоторой – девятки, не рассматриваются).

3. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

4. Правильный n-угольник ориентирован по часовой стрелке. В его вершинах расставлены цифры от 1 до 9. Для каждой пары соседних вершин начальная служит концом, а конечная началом записи одинаковых k-значных чисел ($k < n$, число k, вообще говоря, зависит от пары вершин). Докажите, что расстановка цифр переходит в себя при некотором повороте на угол α $(0 < \alpha < 2\pi)$.

5. На сфере нарисовано 1992 больших круга, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей получившегося разбиения сферы найдется по крайней мере 3984 сферических треугольника.

6. Коробка $m \times n$ заполнена прямоугольниками $1 \times k$. Разрешается выбрать k прямоугольников, образующих квадрат $k \times k$, и поменять у них одновременно ориентацию. Докажите, что все прямоугольники можно сориентировать одинаково.

7. Плоскость раскрасили в 5 цветов. Докажите, что существует 2 точки одного цвета, расстояние между которыми отлично от 1 не более чем на 0,001.

8. Дан выпуклый многогранник. В каждой его вершине сходятся три грани. Каждая грань окрашена в один из 4 цветов: красный, желтый, синий или зеленый, причем грани с общим ребром – разных цветов. Докажите, что число красных граней с нечетным числом сторон имеет ту же четность, что и число синих граней с нечетным числом сторон.