Серия 7: всё, что уже было, и графы

1. Сколько существует операций $*$, заданных на множестве $\{1, 2, \ldots, 101\}$ и обладающих следующими свойствами: 1) $a * a = a$; 2) $(a * b) * (c * d) = a * d$?

2. На множестве S определена операция $*$, удовлетворяющая условиям:

(i) $x * (y * z) = (x * y) * z$ при всех x, y, $z \in S$;

(ii) если $x \neq y$, то $x * y \neq y * x$.

Докажите, что $x * (y * z) = x * z$ при всех x, y, $z \in S$.

3. Бесконечные возрастающие последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ таковы, что каждое натуральное число лежит ровно в одной из них, и $a_n = b_n + b_{2n} + \ldots + b_{10n}$ при всех натуральных n. Докажите, что существует бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $n_1, n_2, \ldots$, состоящая из натуральных чисел, такая, что последовательность $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots$ – также арифметическая прогрессия.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

5. Между двумя странами установлено авиационное сообщение. Каждый город одной страны связан беспересадочными рейсами ровно с k городами другой, причем из любого города этих стран можно перелететь в любой другой, возможно с пересадками. (Города одной страны рейсы этой авиакомпании не соединяют.) Из-за финансового кризиса пришлось закрыть один рейс. Докажите, что теперь по-прежнему из любого города можно долететь в любой другой.

6. Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a; b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a; b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

7. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.

8. На окружности дано множество E из $(2n - 1)$ различных точек ($n \geqslant 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные – в белый. Раскраска точек называется *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найти наименьшее значение k, для которого каждая раскраска множества E является хорошей.