Серия 7, напоследок

1. Пусть m и n – натуральные числа, $m > n$. Докажите, что $2(m-n)^2(m^2-n^2+1) \geqslant 2m^2-2mn+1$.

2. Пусть n – целое число, большее 1. Положим $x_1 = n$, $y_1 = 1$, $x_{i+1} = \left[\frac{x_i+y_i}{2}\right]$, $y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_{i+1}}\right]$ при $i = 1, 2, \ldots$. Докажите, что $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = [\sqrt{n}]$.

3. Существует ли строго убывающая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительных чисел, удовлетворяющая при всех $n > 1$ условию $x_n = x_{n^2} + x_{n^3}$?

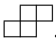
4. На доске выписаны все натуральные делители натурального числа N. Два игрока A и B по очереди делают ходы в следующей игре. Первым ходом игрок A стирает число N. Если последнее стертое число – d, то следующий игрок должен стереть делитель d или кратное d. Проигрывает не имеющий хода. Найдите все N, при которых A может обеспечить себе победу.

5. Дана функция $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$, где трехчлены x^2+ax+b и x^2+cx+d не имеют общих корней. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:

(i) найдется числовой интервал, свободный от значений функции;

(ii) $f(x)$ представима в виде: $f(x) = f_1(f_2(\ldots f_{n-1}(f_n(x))\ldots))$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: $k_i x + b_i$, x^{-1}, x^2.

6. Различные натуральные числа a и b таковы, что $(a-b)^4 = a^3 - b^3$. Докажите, что число $9a-1$ есть куб натурального числа.

7. Квадрат $(2n-1)\times(2n-1)$ разрезан на фигурки трех типов , , . Докажите, что в разрезании участвует не менее $4n-1$ фигурок первого типа (“уголков”).

8. Дана функция $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, не принимающая ни одно значение более 2018 раз. Докажите, что существуют натуральные m и n, для которых $f(m,n) > mn$.