Серия 6(b), учебная

1. Докажите, что всякий выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$) с вершинами в точках с целыми координатами содержит параллелограмм с вершинами в точках с целыми координатами.

2. Даны 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

3. Квадрат разбили на $9801 = 99^2$ равных квадратиков и отметили их центры во всех квадратиках, кроме одного углового. Отмеченные точки разбили на пары, и точки каждой лары соединили вектором. Докажите, что сумма полученных векторов не равна нуль-вектору.

4. На плоскости нарисованы 2018 векторов. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору до тех пор, пока они не кончатся. Проигрывает тот, у кого сумма выбранных им векторов имеет меньшую длину. Может ли начинающий построить свою игру так, чтобы не проиграть?

5. Даны вещественные числа $a \neq 0$, b и c. Докажите, что существует многчолен $P(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что многочлен $aP^2(x) + bP(x) + c$ делится на x^2+1.

6. (Прямая Гаусса). Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков CD, AE и BF лежат на одной прямой.

7. В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли словарь языка этого племени содержать 3 четырехбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

8. В графстве Липшир проживают n джентльменов. Каждый из них знаком с k другими джентльменами. У каждых двух знакомых джентльменов ровно ℓ общих знакомых, а у каждых двух незнакомых джентльменов ровно m общих знакомых. Докажите, что $m(n-k-1) = k(k-\ell-1)$.