Серия 6(а): и мы с пути кривого ни разу не свернём.

1. Пусть вокруг выпуклой фигуры Q описан треугольник ABC. Для опорной прямой, образующей с положительным направлением оси абсцисс угол α, обозначим $l(\alpha)$ длину кратчайшего отрезка этой прямой, соединяющего точку пересечения опорной прямой и Q с границей треугольника и идущего в направлении положительного обхода границы.

а) Докажите, что если $Q_s = sQ_0 + (1-s)Q_1$ – смешение выпуклых фигур Q_0 и Q_1, вписанных в гомотетичные треугольники, а отрезки $l_0(\alpha)$ и $l_1(\alpha)$ определены для них, как описано выше, то $l_s(\alpha) = sl_0(\alpha) + (1-s)l_1(\alpha)$.

б) Докажите, что площадь дополнения фигуры Q до треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} l^2(\alpha)\,d\alpha$.

2. (Неравенство Брунна-Минковского) Докажите, что для площади смешения $Q_s = sQ_0+(1-s)Q_1$ двух фигур Q_0 и Q_1 имеет место неравенство $\sqrt{J(Q_s)} \geqslant s\sqrt{J(Q_0)} + (1-s)\sqrt{J(Q_1)}$ (т.е. $J(Q_0, Q_1) \geqslant \sqrt{J(Q_0)J(Q_1)}$)). Когда достигается равенство?

3. Плоскость разделена тремя лучами, выходящими из одной точки, на три угла, каждый из которых меньше развернутого. Круг радиуса 1 спроецировали на каждую из прямых, содержащих эти лучи. Докажите, что сумма длин отрезков этих проекций, лежащих на лучах, не превосходит 4.

4. (Теорема Люилье) Докажите, что из всех выпуклых многоугольников данного периметра ℓ, стороны которых имеют данное направление, наибольшую площадь имеет описанный многоугольник.

5. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $f(n)$ и $f(2^n)$ взаимно просты при каждом натуральном n.

6. На прямой расположены n отрезков. Из всех возможных пар этих отрезков более половины оказались пересекающимися. Докажите, что тогда найдутся более чем $\frac{n+\frac{1}{2}}{2+\sqrt{2}}$ отрезков, имеющих общую точку.

7. Верно ли, что для любого многочлена $P(x,y)$ с целыми коэффициентами существует многочлен $Q(x,y)$ с целыми коэффициентами, хотя бы один из которых нечетен, такой, что многочлен $P(x,y)Q(x,y)$ имеет менее 100 нечетных коэффициентов?

8. Существует ли непериодическая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, …такая, что при любом натуральном $n > 1$ последовательность a_n, a_{2n}, a_{3n}, …– чисто периодическая?