Серия 6(а): итак.

1. Набор прямых на плоскости назовем *регулярным*, если граница хотя бы одной из частей (не обязательно ограниченной), на которые **они** разбивают плоскость, проходит по каждой из прямых набора. Докажите, что при достаточно большом N среди любых N прямых общего положения на плоскости (никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке) можно найти регулярный набор из 2013 прямых.

2. Существует ли бесконечное множество $M \subset \mathbb{N}$, такое что для любых его элементов $x < y$ число $x + y$ свободно от квадратов?

3. Выберем произвольно два вещественных числа α и β в интервале $(0; 2\pi)$. Положим круглый пирог на неподвижное круглое белое блюдо, на котором нарисован черный сектор угловой величины α. Далее будем выполнять следующее преобразование: вырежем часть пирога, попавшую в сектор, перевернем эту часть и вставим на место "вверх ногами", после чего повернем весь пирог на угол β (в положительном направлении). Докажите, что через конечное число преобразований сразу все точки пирога вернутся на исходные места.

4. Дан треугольник площади 1. На плоскости находятся 2019 параллельных сдвигов этого треугольника. Докажите, что сумма площадей областей, покрытых нечетное число раз, не меньше $\frac{1}{2}$.

5. Дано натуральное число n. На каждом ребре полного графа на $1000n$ вершинах написали целое число. Докажите, что найдется простой цикл, сумма чисел на ребрах которого делится на n.

6. Вершины правильного 2019-угольника требуется раскрасить в белый и зеленый цвета так, чтобы среди любых 21 последовательной вершины нашлась хотя бы одна зеленая. Докажите, что количество способов это сделать нечетно.

7. Даны натуральные числа n и $k \leqslant n$. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены значки так, что в каждой строчке не более k различных значков, и в каждом столбце не более k различных значков. Каково наибольшее возможное количество различных значков в этой таблице?

8. Даны натуральные числа n и k, причем $n \geqslant k$. Некоторое натуральное число S имеет не менее n натуральных делителей (включая единицу и само число). Все делители числа S выписаны в ряд в порядке убывания. Какое наименьшее количество делителей может иметь k-е число в этом списке?