Серия 6: немного несложной арифметики

1. а) Докажите, что если числа $a+b$ и a^2+b делятся на m, то a^n+b также делится на m при любом n (a, b и m – некоторые натуральные числа).

б) Докажите, что если $f(n)=a^n+b_0+b_1n+\ldots+b_kn^k$ делится на m при $n=1, n=2, \ldots, n=k+1, n=k+2$, то $f(n)$ делится на m при любом n ($a, b_0, b_1, \ldots, b_k, m$ – некоторые натуральные числа).

2. Пусть n – натуральное число, и S – множество всех натуральных чисел a таких, что $1<a<n$ и число $a^{a-1}-1$ делится на n. Докажите, что если $S=\{n-1\}$, то n – удвоенное простое число.

3. Пусть n – составное число. Числа $a_1<a_2<\ldots<a_k$ – все числа из множества $\{1,2,3,\ldots,n\}$, не взаимно простые с n. Пусть $b_1,\ldots,b_k$ – перестановка чисел $a_1,\ldots,a_k$. Докажите, что найдутся индексы i и j, $1\leqslant i<j\leqslant k$ такие, что a_ib_i и a_jb_j дают одинаковые остатки при делении на n.

4. Пусть $p>3$ – простое число, a и b – целые числа такие, что a^2+ab+b^2 делится на p. Докажите, что $(a+b)^p-a^p-b^p$ делится: а) на p^2; б) на p^3.