Серия 6: всякое разное по потребности.

1. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

2. У прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times b$ окрасили одну грань $1 \times b$ и положили его на плоскость этой гранью вниз. Может ли он после 1999 перекатываний оказаться на том же месте, но окрашенной гранью вверх?

3. При каком наибольшем α любые вещественные числа $0 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{11} = 1$ можно разбить на две группы, средние арифметические в которых отличаются не меньше чем на α?

4. Докажите, что при любых M и N система уравнений $x + y + z = M$, $x^{2017} + y^{2017} + z^{2017} = N$ имеет только конечное число решений в целых числах с попарно неравными модулями.

5. Докажите, что число способов, которыми можно расставить n чисел $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 10)$ в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит 81^n.

6. На конференцию приехали 300 участников. Каждый участник знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на три группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для всех ее членов.

7. Докажите, что количество перестановок n элементов, разбивающихся на k циклов, равно количеству способов выписать числа от 1 до n в ряд в таком порядке, чтобы нашлось ровно k чисел, каждое из которых больше всех написанных перед ним.

8. Дано вещественное число α. Последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ состоит из всех натуральных чисел n, для которых $\{n\alpha\} < \frac{1}{10}$. Докажите, что среди чисел $n_2 - n_1$, $n_3 - n_2$, $n_4 - n_3$, $\ldots$ не более трех различных.