Серия 5(b): пограничные задачи

1. Докажите, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 19$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

2. Натуральное число n назовем *почти квадратом*, если n можно представить в виде $n = ab$, где a и b – натуральные числа, причем $a \leqslant b \leqslant 1{,}01a$. Докажите, что для бесконечно многих натуральных m среди чисел m, $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+198$ нет почти квадратов.

3. Сто депутатов образовали 450 комиссий. Каждые две комиссии пересекаются не более чем по трем депутатам, а каждые пять комиссий – не более чем по одному. Докажите, что какие-то четыре комиссии пересекаются ровно по одному депутату.

4. На доске были выписаны 4000 различных натуральных чисел, меньших 30000. Если на доске выписаны числа a и b, разрешается дописать на доску число НОД(a, b). Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, что все числа от 1 до 10000 будут выписаны на доске.

5. На плоскости отмечено 179 точек. Докажите, что найдётся такая отмеченная точка, что расстояния от неё до двух ближайших к ней отмеченных точек отличаются не более чем в 1,79 раза.

6. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество знакомств (пар знакомых) кратно трем.

7. Обозначим через $p(n, k)$ количество делителей числа n, не меньших, чем k. Чему равна сумма $p(1001, 1) + p(1002, 2) + p(1003, 3) + \ldots + p(2000, 1000)$?

8. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить в виде суммы не более n натуральных делителей $n!$.

9. Назовем натуральное число *черным*, если оно равно 1 или является произведением четного количества простых чисел (необязательно различных). Все остальные натуральные числа назовем *белыми*. Существует ли натуральное число, у которого сумма всех белых делителей равна сумме всех черных? (1 и само число тоже считаются делителями.)