

Серия 5(б): площади и решётки.

1. Докажите, что если продолжения сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке W , а X и Y – середины диагоналей AC и BD , то площадь треугольника WXY равна одной четверти площади четырехугольника $ABCD$.

2. Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет системе неравенств
$$\begin{cases} 2x \geq 3y, \\ 3x \geq 4y, \\ 5x - 7y \leq 20 \end{cases} \quad ?$$

3. Пусть a, b, c, d – такие целые числа, что система уравнений $ax + by = m, cx + dy = n$ при любых целых m и n имеет решение в целых числах. Докажите, что $ad - bc = \pm 1$.

4. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ – три дроби с натуральными числителями и знаменателями такие, что $be - af = 1$. Докажите, что $d \geq b + f$.

5. На клетчатой бумаге лежит квадрат с вершинами в узлах сетки. Его передвинули, но так, что две вершины снова попали в узлы. Докажите, что две другие вершины тоже попали в узлы.

6. Площадь треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки равна $\frac{1}{2}$. Может ли наименьшая из его сторон быть больше 2000?

7. На плоскости дана квадратная решетка 100×100 точек (100 рядов по 100 точек с одинаковыми промежутками между ними). Разрешается проводить прямые, не проходящие через левую нижнюю точку этой решетки. Каким наименьшим числом таких прямых можно покрыть все точки, кроме левой нижней?

8. Внутри треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки находится ровно один узел. Какое наибольшее количество узлов может лежать на сторонах треугольника (включая вершины треугольника)?