Серия 5(а), очень длинная

1. Пусть многоугольники Q_0 и Q_1 имеют соответственно параллельные и одинаково направленные стороны (возможно, некоторые из них – нулевой длины). Параллельным переносом этих многоугольников мы можем добиться того, чтобы они и их смешение $Q_s = sQ_0 + (1-s)Q_1$ содержали начало координат.

а) Докажите, что если a_i и a'_i – соответственные стороны наших многоугольников (в порядке обхода), а h_i и h'_i – расстояния до этих сторон от начала координат, то для аналогичных величин многоугольника Q_s имеют место равенства $a_i^{(s)} = sa_i + (1-s)a'_i$ и $h_i^{(s)} = sh_i + (1-s)h'_i$.

Теперь легко видеть, что площадь Q_s есть

$$J(Q_s) = s^2 J(Q_0) + s(1-s)\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i h'_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a'_i h_i\Big) + (1-s)^2 J(Q_1).$$

б) Докажите, что $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h'_i = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a'_i h_i$.

Величина $J(Q_0, Q_1) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h'_i$ называется *смешанной площадью* многоугольников Q_0 и Q_1. Очевидно, в качестве эквивалентного определения можно использовать равенство $J(Q_s) = s^2 J(Q_0) + 2s(1-s)J(Q_0, Q_1) + (1-s)^2 J(Q_1)$.

Определение. Пусть L_1 и L_2 – две выпуклые кривые (то есть кривые, оганичивающие выпуклые фигуры K_1 и K_2). Расстояние от L_1 до L_2 – это наименьшее r, для которого L_2 содержится в r-окрестности кривой L_1.

Расстояние между кривыми L_1 и L_2 – это большее из расстояний от L_1 до L_2 и от L_2 до L_1.

2. а) Докажите, что так определенное расстояние между кривыми действительно удовлетворяет аксиомам метрики (то есть неотрицательно, симметрично и подчиняется неравенству треугольника).

б) Докажите, что если расстояние между кривыми L_1 и L_2 не больше r, то разность их длин не превосходит $2\pi r$.

в) Докажите, что в условиях пункта б) разность площадей фигур K_1 и K_2 не превосходит $Lr + \pi r^2$, где L – наибольшая из длин кривых L_1 и L_2.

Теперь мы можем определить смешанную площадь двух произвольных выпуклых фигур Q_0 и Q_1. Рассмотрим последовательности многоугольников $Q_0^{(n)} \to Q_0$ и $Q_1^{(n)} \to Q_1$ (имеется в виду сходимость по метрике, определенной в задаче 6). Тогда (проверьте) $Q_s^{(n)} \to Q_s$, а

$$J(Q_s^{(n)}) = s^2 J(Q_0^{(n)}) + 2s(1-s)J(Q_0^{(n)}, Q_1^{(n)}) + (1-s)^2 J(Q_1^{(n)}).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ (и пользуясь тем, что в силу утверждения задачи 2в) $J(Q_0^{(n)}) \to J(Q_0)$ etc.), видим, что для некоторой величины $J(Q_0, Q_1)$

$$J(Q_s) = s^2 J(Q_0) + 2s(1-s)J(Q_0, Q_1) + (1-s)^2 J(Q_1).$$

Эта величина и есть смешанная площадь Q_0 и Q_1.

3. Докажите, что

а) смешанная площадь многоугольника Q и отрезка l длины 1 численно равна проекции фигуры Q на прямую, перпендикулярную к отрезку l.

б) смешанная площадь выпуклых многоугольников Q и Q_1 с попарно параллельными и одинаково направленными сторонами, если многоугольник Q_1 описан вокруг окружности радиуса 1, численно равна половине периметра Q.

в) смешанная площадь выпуклой фигуры Q и круга радиуса 1 равна половине длины границы Q.

4. Докажите, что в выпуклом n-угольнике с площадью S, периметром P и углами A_1, A_2, …, A_n

$$\frac{P^2}{S} \geqslant 4\Big(\operatorname{ctg}\frac{A_1}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A_2}{2} + \ldots + \operatorname{ctg}\frac{A_n}{2}\Big).$$

5. Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

6. а) В прямоугольнике площади 5 расположены девять многоугольников площади 1; докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{9}$.

На кафтане площади 1 имеется 5 заплат. Докажите, что

б) если площадь каждой заплаты $\geqslant \frac{1}{2}$, то найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$.

в) в условиях задачи а) найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{20}$;

г) если площадь общей части любых двух заплат $\geqslant \frac{1}{4}$, то найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{40}$.

7. Дано натуральное $m > 1$ и целые числа a, b, c, d. Докажите, что существуют целые числа x, y, u, v, не превосходящие по модулю $\sqrt{m}$ и не все равные 0, такие, что $ax + by \equiv u \pmod{m}$ и $cx + dy \equiv v \pmod{m}$.

8. Сумму $\sum\limits_{n=1}^{p-1} nH_n^2$, где $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ и $p > 2$ – простое число, представили в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что $a - b$ кратно p.