Серия 5(а): комбинаторика чистая, геометрическая и даже арифметическая.

1. В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 6783 космонавта, причем известно, что среди любых четырех из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж.

2. (П.Эрдёш-Д.Секереш) Докажите, что для любого натурального $m \geqslant 3$ существует натуральное $C(m)$ такое, что среди любых $C(m)$ точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, можно найти m точек, являющихся вершинами выпуклого m-угольника.

3. Мария Ивановна несла в школу 2^k яблок, где k – целое неотрицательное число, но съела одно по дороге. Оставшиеся яблоки она раздала Васе и Пете в непрозрачных пакетах. Дети хотят узнать, кому досталось больше, но им нельзя разговаривать. Они заранее знали, что им раздадут $2^k - 1$ яблок для некоторого k, но не знали, чему равно k. Они договорились, что в тот момент, когда они (одновременно) откроют свои пакеты и увидят, сколько в них яблок, каждый из них тихонько почешет либо левое, либо правое ухо. Как Васе и Пете с помощью такого обмена информацией узнать, у кого больше яблок (или что яблок у них поровну, если учительница съела единственное яблоко)?

4. Найдите все натуральные $n > 4$, для которых верно такое утверждение: в любой триангуляции выпуклого n-угольника P найдется диагональ, которая делит P на четырехугольник и $(n-2)$-угольник.

5. Дано натуральное число k. На координатной плоскости проведены k прямых $a_ix + b_iy = 1$, где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, не проходящих через целые точки. Какое наибольшее количество из 10000 единичных квадратиков квадрата $0 \leqslant x \leqslant 100$, $0 \leqslant y \leqslant 100$ может разрезать объединение этих прямых?

6. Будем говорить, что две триангуляции выпуклого n-угольника ортогональны, если у них нет ни одной общей диагонали. Докажите, что все триангуляции с двумя ушами имеют одинаковое количество ортогональных.

7. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, в котором все попарные расстояния между вершинами различны, найдется такая вершина, что ближайшая к ней вершина многоугольника является соседней с ней.

8. Петя написал 100 натуральных чисел $n, n+1, \ldots, n+99$, а Вася – 99 натуральных чисел $m, m-1, \ldots, m-98$. Оказалось, что для каждого Петиного числа найдётся Васино, которое на него делится. Докажите, что $m > n^3/10^7$.