Серия 5, чтобы порадовать Сеню.

1. (Битти, Банг) а) Докажите, что если последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд, то α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

б) Докажите, что если α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд.

2. Может ли геометрическая прогрессия содержать бесконечно много членов вида а) $2^n - 1$, б) $2^n + 1$?

3. (Я.В.Успенский) Обозначим $A(\alpha)$ множество всех чисел вида $[n\alpha]$ с натуральными n. Существуют ли три таких положительных числа α, β, γ, для которых множества $A(\alpha)$, $A(\beta)$, $A(\gamma)$ не пересекаются и дают в объединении весь натуральный ряд?

4. Дано простое число p. Докажите, что из $p+1$ попарно различных натуральных чисел можно выбрать два числа таких, что отношение большего из них к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$.

5. Натуральные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n взаимно просты в совокупности. Положим $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что $[1, 2, \ldots, n]$ делится на $(s_1, \ldots, s_n)$.

6. Докажите, что если $p = 4k+3$ – простое число, то уравнение $x^{2p} + y^{2p} + z^{2p} = w^{2p}$ не имеет решений в натуральных числах, не кратных p.

7. Пусть P – кубический многочлен $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c и d – целые числа и $a \neq 0$. Предположим, что $xP(x) = yP(y)$ для бесконечно многих пар x, y целых чисел, в которых $x \neq y$. Докажите, что у уравнения $P(x) = 0$ есть целый корень.

8. Пусть p – простое число и $f(x)$ – многочлен степени d с целыми коэффициентами такой, что:

(i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;

(ii) для каждого натурального n остаток от деления $f(n)$ на p равен 0 или 1.

Докажите, что $d \geqslant p - 1$.