Серия 5: глупые игры нашего Тигры.

1. На плоскости проведено несколько полос разной ширины. Никакие две из них не параллельны. Как нужно параллельно перенести каждую из этих полос, чтобы площадь их общей части была наибольшей?

2. В клетки полоски 1×2008 двое игроков по очереди записывают буквы О и Г (нельзя в одну клетку записывать две буквы). Если после очередного хода в некоторых трех подряд идущих клетках появляется слово ¡¡ОГО¿¿, то игрок, сделавший этот ход, выигрывает. Если все клетки заполнены, и никто не выиграл, то объявляется ничья. Имеется ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

3. Есть полный неориентированный граф на 2014 вершинах. Двое играют в игру. Первый каждым своим ходом ориентирует любое еще не ориентированное ребро. Второй каждым своим ходом ориентирует от 1 до 1000 еще не ориентированных ребер. Игра заканчивается, когда все ребра ориентированы. Первый выигрывает, если после этого в графе можно найти простой ориентированный цикл, иначе выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

4. На нижних 50 ступеньках лестницы длиной в 101 ступеньку лежит по камню. Сизиф может взять любой камень и отнести его вверх до ближайшей свободной ступеньки. Аид может скатить любой камень на предыдущую ступеньку, если она свободна. Ходят они по очереди. Может ли Сизиф поднять хоть один камень на верхнюю ступеньку?

5. На плоскости даны $2n$ точек. Два игрока по очереди выбирают по одной точке до тех пор, пока они не закончатся (одну точку дважды выбирать нельзя). Проигрывает тот, у кого сумма попарных расстояний между выбранными им точками меньше, чем у соперника. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его противник? (Все расстояния между данными точками и все суммы попарных расстояний для разных наборов точек попарно различны.)

6. Даны натуральные числа $k > m$. Пусть A — алфавит из m букв, а B — алфавит из $2m$ букв. Обозначим через a_k количество $2k$-буквенных слов в алфавите A, в каждом из которых каждая буква из A присутствует, причём чётное число раз. Обозначим через b_k количество $2k$-буквенных слов в алфавите B, в каждом из которых каждая буква из B присутствует нечётное число раз. Найдите a_k/b_k.

7. По периметру круглого торта диаметром n/π метров расположены n вишенок. Если на концах некоторой дуги находятся вишенки, то количество остальных вишенок на этой дуге меньше, чем длина дуги в метрах. Докажите, что торт можно разрезать на n равных секторов так, что в каждом куске будет по вишенке.

8. На плоскости дано k точек, из каждой проведено несколько лучей так, что никакие два из них не пересекаются. Докажите, что среди всех отрезков, соединяющих исходные точки, можно указать $k-1$ не имеющих общих внутренних точек ни с одним из лучей и друг с другом.