Серия 4(b): перечисления и графы.

1. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_k, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^ka_k$.

2. Назовем изящным разбиение натурального числа на слагаемые, каждое из которых является степенью двойки и используется не более двух раз. У каких натуральных чисел количество изящных разбиений четно? (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одно).

3. Прямоугольник разбит на несколько прямоугольников. Назовем *перекрестком* точку, принадлежащую четырем прямоугольникам разбиения, а *максимальным отрезком* – отрезок, идущий по сторонам прямоугольников разбиения и не содержащийся ни в каком большем отрезке, идущем по сторонам прямоугольников разбиения. Докажите, что сумма количества перекрестков и количества максимальных отрезков на 3 больше количества прямоугольников разбиения.

4. В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны $m \times n$ сидят k ёжиков ($k < m \leqslant n$). За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним ёжиком?

5. Докажите, что при простом p $C_{cp+d}^{ap+b} \equiv C_c^a C_d^b \pmod p$ (при $m > n$ мы полагаем $C_n^m = 0$).

6. Клетчатая "лесенка" состоит из n столбиков, нижние клетки которых составляют строчку из n клеток, а количества клеток в столбиках (слева направо) 1, 2, $\ldots$, n. При каких n такую лесенку можно разбить на n квадратов с натуральными сторонами?

7. На праздник собрались n человек. Среди каждых четырех из них есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Докажите, что всех собравшихся можно разбить на две группы так, что в одной группе все друг с другом знакомы, а в другой никто ни с кем не знаком.

8. В клубе n членов. Они образовали k комитетов. В каждом комитете не менее ℓ членов, и у каждых двух комитетов не более одного общего члена. Докажите, что $k \leqslant \frac{n(n-1)}{\ell(\ell-1)}$.