Серия 4(b): срочная гуманизация образования.

1. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A – враг B, то B – враг A.)

2. В связном графе с 1999 вершинами степени всех вершин не превосходят 19. Докажите, что вершины этого графа можно правильно раскрасить в 19 цветов.

3. В шахматном турнире участвовало n шахматистов – гроссмейстеры и мастера. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в партиях против мастеров. Доказать, что $\sqrt{n}$ – целое число.

4. k и n – натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k-1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.

5. Пусть n – целое число. Докажите, что если $2+2\sqrt{28n^2+1}$ – целое число, то оно является точным квадратом.

6. Из первых k простых чисел 2, 3, 5, $\ldots$, p_k $(k>4)$ составлены всевозможные произведения, в которые каждое из чисел входит не более одного раза (например, $3\cdot 5$, $3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p_k$, $11\cdot 13$, 7 и т. д.). Обозначим сумму таких чисел S. Докажите, что $S+1$ разлагается в произведение более $2k$ простых сомножителей.

7. Из натуральных чисел от 1 до $2n$ выбрали $n+1$ число. Докажите, что одно из выбранных делится на другое.

8. Некоторое множество целых чисел, среди элементов которого есть как положительные, так и отрицательные, вместе с каждыми своими элементами a и b содержит $2a$ и $a+b$.

Докажите, что это множество содержит разность любых двух своих элементов.

9. $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ – натуральные числа. Клетки таблицы 100×100 заполнены числами: на пересечении k-й строки и l-го столбца стоит число $a_k - a_l$. Докажите, что не менее пятой части всех чисел в таблице кратны 5.