Серия 4(а): арифметика и комбинаторная геометрия.

1. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ для любого целого n. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что для любого целого n $F(n)$ будет делиться на него.

2. Существует ли квадратный трехчлен с целыми коэффициентами такой, что все простые делители его значений в натуральных точках имеют вид $4k+3$?

3. Даны натуральное число n и простое число p. Докажите, что $C_{np}^p - n$ делится на np.

4. Даны натуральное n и вещественное $x > 0$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(x \left[\frac{k}{x}\right] - (x+1)\left[\frac{k}{x+1}\right]\right) \leqslant n$.

5. Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и сферы любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны?

6. Пусть $Oxyz$ – прямоугольная система координат в пространстве, S – конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z – множества ортогональных проекций всех точек S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что $|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$. (Через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A. Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость).

7. а) Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $\frac{S}{P}$.

б) Выпуклый многоугольник площади S и периметра P является пересечением полуплоскостей, границы которых содержат его стороны. Эти полуплоскости сдвинули так, что образованный ими многоугольник оказался описан около окружности радиуса 1. Площадь этого многоугольника равна s, а радиус наибольшего круга, который можно поместить в исходный многоугольник, равна r. Докажите, что $Pr - S - sr^2 \geqslant 0$, причём равенство имеет место только в случае, когда исходный многоугольник – описанный.

8. Докажите, что если некоторая выпуклая фигура может быть покрыта двумя полосами ширины a и b, то она может и быть покрыта и одной полосой ширины $a+b$.