Серия 4, про множества

1. Дан граф с n вершинами. Обозначим через $F(x)$ количество способов, которым можно покрасить его вершины правильным образом в x цветов.

а) Докажите, что $F(x)$ — многочлен степени n.

б) Найдите хроматический многочлен дерева с n вершинами.

в) Найдите хроматический многочлен цикла с n вершинами.

г) Выпуклый n-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что хроматический многочлен получившегося графа не зависит от выбора диагоналей.

2. Пусть S – множество из n элементов, f – функция, сопоставляющая каждому подмножеству S некоторое вещественное число. Известно, что $f(A \cup B) \leqslant \max\{f(A), f(B)\}$ и $f(S \setminus A) = f(A)$ для любых $A, B \subset S$. Докажите, что f принимает не более n различных значений.

3. Пусть $n = 2^k$, где k натуральное. Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выделены $2^{n-1} + 1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $k+1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: "Лежит ли число в A_i?" однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.

4. Пусть $r \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ – целые числа. Для каждого множества A обозначим $\binom{A}{r}$ множество подмножеств A из r элементов. Докажите, что для каждого бесконечного множества A и каждой функции $f : \binom{A}{r} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ существует бесконечное подмножество $B \subset A$ такое, что $f(x) = f(y)$ для любых $x, y \in \binom{B}{r}$.

5. A, B, C – конечные непустые множества целых чисел. Докажите, что $|A + B + C| \geqslant \frac{|A+B|+|B+C|+|A+C|-1}{2}$. Здесь $A + B$ обозначает множество всевозможных сумм вида $a + b$, $a \in A$, $b \in B$; $|A|$ обозначает число элементов множества A.

6. Пусть p – простое число. Дано множество A, содержащее не менее p элементов. Назовем *p-семейством* множество, состоящее из попарно непересекающихся p-элементных подмножеств A. Докажите, что разность количества p-семейств, содержащих четное число подмножеств, и количества p-семейств, содержащих нечетное число подмножеств, делится на p.

7. Множество натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не превосходящих 2^n, назовем *хорошим*, если суммы элементов всех его подмножеств различны по модулю 2^n (сумму пустого подмножества считаем равной 0). Сколько существует хороших множеств?

8. В городе N. существует множество оппозиционных обществ, каждое из которых состоит из 10 членов. Известно, что для любых 2004 обществ найдется человек, состоящий хотя бы в 11 из них. Докажите, что правительство может арестовать 2003 человека так, чтобы в каждом обществе хотя бы один член был арестован.