Серия 4, с добавлением арифметики.

1. На бесконечной ленте напечатана бесконечная последовательность цифр от 1 до 9. Докажите, что либо какая-то комбинация цифр повторится 10 раз подряд, либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел идущих в порядке убывания.

2. Вершины бесконечного графа занумерованы всеми натуральными числами, причем каждое натуральное число является номером ровно одной вершины. Известно, что в этом графе нет двух непересекающихся множеств, по 100 вершин в каждом, таких, что каждая вершина из первого множества соединена с каждой вершиной из второго. Докажите, что существует сколь угодно длинная арифметическая прогрессия такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

3. а) В распоряжении грузчика есть вагон и маленькая тележка. Вагон выдерживает груз весом до 1000 кг, а тележка – всего 1 кг. На складе лежит несколько (конечное число) мешком с песком. Известно, что их общая масса больше, чем 1001 кг, а каждый мешок весит не больше 1 кг. Какую наибольшую массу песка грузчик заведомо сможет загрузить в вагон и маленькую тележку, независимо от того, какие именно мешки лежат на складе?

б) В распоряжении грузчика есть две тележки: одна выдерживает 8 кг, а другая – 9 кг. На складе лежит несколько (конечное число) мешков с песком. Известно, что их общая масса больше, чем 17 кг, а каждый мешок весит не больше 1 кг. Какую наибольшую массу песка грузчик заведомо сможет загрузить на эти две тележки, независимо от того, какие именно мешки лежат на складе?

4. Пусть $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$ – бесконечная последовательность целых чисел, где никакое число не встречается дважды и $a_n + b_n = n$ при всех n. Докажите, что в последовательности $a_1/1$, $b_1/1$, $a_2/2$, $b_2/2$, $\ldots$, a_n/n, b_n/n, $\ldots$ бесконечно много чисел, больших а) 1,4; б) 1,6; в) 1,7.

5. Пусть $n \geqslant a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ – натуральные числа такие, что $[a_i, a_j] \leqslant n$ при любых i и j. Докажите, что $ia_i \leqslant n$ при всех i.

6. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа a^2+1. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

7. Простое число $p \neq 2017$ и натуральное число a таковы, что p и ap представимы в виде $x^2 - 2017y^2$ с целыми x и y. Докажите, что a тоже представимо в таком виде.

8. Пусть a_p – коэффициент при x_p многочлена $(x^2+x+1)^p$. Докажите, что $a_p \equiv 1 \pmod{p^2}$.