Серия 4: от бесконечности к комбинаторной геометрии

1. Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность попарно пересекающихся множеств натуральных чисел, каждое из которых содержит не более 2000 элементов. Докажите, что существует конечное множество B натуральных чисел такое, что пересечение любых двух множеств A_i и A_j, $(i, j \in \mathbb{N})$ содержит хотя бы один элемент множества B.

2. Среди бесконечного количества гангстеров каждый охотится за каким-то одним из остальных. Докажите, что существует бесконечное подмножество этих гангстеров, в котором ни один не охотится за кем-либо из этого подмножества.

3. Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным подмножествам?

4. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

5. Некоторые из точек плоскости, имеющих целочисленные координаты, окрашены в n цветов. Известно, что никакие четыре точки одного цвета не лежат на одной окружности. Докажите, что существует окружность радиуса 2017, внутри которой нет ни одной окрашенной точки.

6. Существует ли на плоскости такое множество точек, что внутри любого треугольника площади 1 окажется конечное непустое множество точек из этого множества?

7. На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L. Докажите, что найдется квадрат со стороной а) 0,8; б) 0,75, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L.

8. Граф G обладает следующим свойством: для любой четвёрки различных вершин A, B, C и D, если существуют рёбра AB и CD, то между этими вершинами есть ещё хотя бы одно ребро. Докажите, что всякий простой путь наибольшей длины в таком графе проходит через каждую вершину максимальной степени.