Серия 3(b): поговорим?

1. На одной из клеток доски $n \times n$, строки и столбцы которой занумерованы числами от 1 до n, стоит фишка. Если фишка стоит в k-ой строке, её можно переместить в любую клетку k-го столбца. Докажите, что можно так перемещать фишку, чтобы она побывала во всех клетках доски ровно по одному разу и вернулась в исходную клетку.

2. (Теорема Минковского). На плоскости с целочисленной решеткой лежит выпуклая фигура, центрально симметричная относительно начала координат, которая не содержит других целых точек. Докажите, что ее площадь не превосходит 4.

3. В таблице $m \times n$ записаны чисна так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не меньше, чем $(n+m-1)$ чисел.

4. Даны натуральные n и k, причём $k \leqslant 2^{n-1}$. Докажите, что на доске $n \times n$ можно отметить несколько клеток так, чтобы количество способов расставить на отмеченных клетках n не бьющих друг друга ладей было равно k.

5. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 2^n команд. Докажите, что после окончания турнира можно выбрать $n+1$ команду A_1, A_2, $\ldots$, A_{n+1} так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с бо́льшими номерами.

6. Дано натуральное k, большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn, для которого $F_k(n) \cdot n$ – точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.