Серия 3(b): разные идеи.

1. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

2. В классе 30 учеников, и у каждого из них одинаковое число друзей среди одноклассников. Каково наибольшее возможное число учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей? (Про любых двух учеников в классе можно сказать, кто из них учится лучше; если A учится лучше B, а тот – лучше C, то A учится лучше C.)

3. У Мерлина есть две таблицы 21×21; одна из них пустая, а на другой, волшебной, написаны какие-то числа. Первая таблица прибита к скале у входа в пещеру, а вторая – к стене внутри пещеры. Вы можете обвести на первой таблице какой-нибудь квадрат (размером 1×1, 2×2, …или 21×21), расположенный в любом месте таблицы, и за шиллинг узнать у Мерлина сумму чисел, стоящих в клетках соответствующего квадрата на волшебной таблице. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы узнать сумму чисел на диагонали волшебной таблицы?

4. Квадрат 25×25 разбит на единичные квадратики. Разрешается обвести красным границу квадрата любого размера, не выходящего за границы большого квадрата. Какое наименьшее количество квадратов нужно обвести, чтобы все стороны всех единичных квадратиков оказались красными?

5. В лесу mn тропок и несколько полян. Каждая тропка соединяет две поляны. Известно, что тропки можно раскрасить в m цветов так, чтобы на каждой поляне сходились тропки разных цветов. Докажите, что это можно сделать, покрасив в каждый цвет ровно n тропок.

6. N точек соединены друг с другом некоторым количеством отрезков; из каждой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что точки можно покрасить в 4 цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N.

7. 15 волейбольных команд разыграли турнир в один круг, причем каждая команда одержала ровно семь побед. Сколько в этом турнире таких троек команд, в которых первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, а третья у первой?

8. Докажите, что A является максимальным по количеству вершин независимым множеством в графе на множестве вершин V, то есть множеством, никакие две вершины которого не соединены ребром, тогда и только тогда, когда для любого независимого подмножества $B \subset V \setminus A$ множество ΔB вершин A, соединенных с вершинами B, содержит не меньше элементов, чем B.