Серия 3(а), гуманная.

1. Даны два семейства $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, состоящие из подмножеств n-элементного множества X. Известно, что если $A \subset B \subset X$ и $A \in \mathcal{S}_i$, то и $B \in \mathcal{S}_i$. Докажите, что $2^n \cdot |\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2| \geqslant |\mathcal{S}_1| \cdot |\mathcal{S}_2|$. (Здесь $|\mathcal{S}|$, как и раньше, обозначает число различных множеств в семействе $\mathcal{S}$.)

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа и $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Докажите, что для любого целого числа $k \geqslant 2$ существуют целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, $|a_i| \leqslant k-1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и такие, что

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

3. Пусть $p_n(k)$ – число перестановок множества из n элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что а) $\sum\limits_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$, б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$.

4. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, если число $a - 10b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

5. В клетках таблицы 9×9 стоят нули. С таблицей можно проделывать следующие операции.

1) Выбрать произвольную строку, прибавить ко всем числам этой строки единицу, и сдвинуть все эти числа вправо на одну клетку (а последнее число записать на первое место).

2) Выбрать произвольный столбец, вычесть единицу из всех его чисел, и сдвинуть все эти числа на одну клетку вниз (а самое нижнее записать в верхнюю клетку).

Можно ли за несколько таких операций получить таблицу, в которой во всех клетках, кроме двух, стоят нули, в левой нижней стоит 1, а в правой верхней стоит -1?

6. Можно ли все непустые подмножества множества из 10 элементов разбить на тройки так, чтобы в каждой тройке два из подмножеств не пересекались и в объединении давали третье?

7. Дано 200 палочек, длины которых равны $1, 2, 4, \ldots 2^{199}$. Какое наименьшее количество палочек надо сломать, чтобы из всех получившихся палочек можно было бы сложить несколько треугольников? (Треугольник можно складывать из трех палочек, палочку можно ломать только один раз.)

8. На доске $n \times n$ поставлено несколько фишек так, что для каждой фишки все клетки, расположенные правее или ниже ее, тоже заняты фишками. Пусть в i-й сверху строке содержится a_i фишек, в j-м слева столбце – b_j фишек. Докажите, что наборы чисел

$$a_1,\ a_2 - 1,\ \ldots,\ a_n - n + 1 \quad \text{и} \quad b_1,\ b_2 - 1,\ \ldots,\ b_n - n + 1$$

совпадают.