Серия 3: неформальная формалистика.

1. На планете P стран ($1000 < P < 2000$), некоторые тройки которых образуют трехсторонние союзы, причем каждые две страны входят вместе ровно в один такой союз. Известно, что если тройки ABF, BCG, CAH образуют союзы, то и тройка FGH образует союз. Найдите все P, при которых такое возможно.

2. Несколько шахматистов разыграли турнир в один круг, в котором не было ничьих. В турнирной таблице расставили 0 и 1 в соответствии с результатами, после чего обнаружилось, что судьи забыли, кто из шахматистов каким номером обозначен. Докажите, что число способов восстановить нумерацию нечетно.

3. Пьяный библиотекарь каждую минуту снимает с полки какой-то том Британской Энциклопедии, стоящий не на своем месте, и ставит его на свое место. Если в некоторый момент все тома окажутся на своих местах, то библиотекарь запишется в Общество Трезвости. Может ли Общество однозначно рассчитывать на пополнение своих рядов?

4. Множество X на координатной плоскости удовлетворяет следующим условиям:

а) пересечение множества X с любым единичным квадратом, координаты вершин которого – целые числа, состоит из двух параллельных отрезков с концами в серединах сторон квадрата;

б) множество X переходит в себя при сдвиге на 25 единиц в направлении, параллельном любой координатной оси.

Докажите, что X содержит бесконечно длинную ломаную.

5. Дан правильный 2003-угольник. Его вершины покрашены в два цвета: 500 из них – в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа покраски.

6. Дано натуральное d. Различные подмножества A_1, A_2, $\dots$, A_n, B_1, $\dots$, B_k множества $D = \{1, 2, \dots, d\}$ таковы, что для любого непустого подмножества X множества D найдётся единственная пара индексов (i, j) такая, что $X = A_i \triangle B_j$. Найдите все возможные пары (n, k). (Напомним, что $A \triangle B$ – это множество всех элементов, лежащих ровно в одном из множеств A и B.)

7. В городе 100000 человек, любые двое либо враждуют, либо дружат. Можно ли каждому человеку выдать бесконечное множество, состоящее из натуральных чисел, так, чтобы множества любых двух дружащих имели бесконечно много общих элементов, а множества любых двух враждующих не имели общих элементов?

8. Множество целых чисел содержит более 3^k элементов. Докажите, что в нем можно выбрать $(k+1)$-элементное подмножество S так, что суммы элементов во всех непустых подмножествах множества S различны.