Серия 3, с упражнениями.

1. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинством в 1 гривну, а также α^k гривен при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что каждую сумму в натуральное число гривен можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

2. Найдите наибольшее вещественное k, для которого существуют множество X и его подмножества Y_1, Y_2, ..., Y_{31}, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(1) для любых двух элементов X найдется подмножество Y_i, не содержащее ни одного из них;

(2) при любом сопоставлении подмножествам Y_i неотрицательных чисел α_i с суммой, равной 1, найдется такой элемент из X, что сумма α_i, сопоставленных всем содержащим его подмножествам Y_i, не меньше k.

3. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел равна 1. Разрешается вычесть одно и то же положительное число из любых n клеток, никакие две из которых не стоят в одной строке или в одном столбце. Докажите, что такими операциями можно получить таблицу из одних нулей. (Число и набор клеток заново выбираются для каждой операции.)

4. Пусть $r \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ – целые числа. Для каждого множества A обозначим $\binom{A}{r}$ множество подмножеств A из r элементов. Докажите, что для каждого бесконечного множества A и каждой функции $f : \binom{A}{r} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ существует бесконечное подмножество $B \subset A$ такое, что $f(x) = f(y)$ для любых x, $y \in \binom{B}{r}$.

5. На прямой выбрано 100 множеств A_1, A_2, ..., A_{100}, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств A_1, A_2, ..., A_{100} является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком).

6. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n - 2$ гвоздями.

7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

8. По кругу расставлены числа 1, 2, ..., n. Если соседнее с числом a по часовой стрелке – число $b > a + 1$, то числа a и b можно поменять местами. Докажите, что больше $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ таких операций сделать не удастся.