Серия 2(b), с ловушкой

1. Каждое из подмножеств A_1, A_2, ..., A_n 2009-элементного множества X содержит не менее 4 элементов. Пересечение любых двух из этих подмножеств содержит не более 2 элементов. Докажите, что в X можно найти 24-элеметное подмножество B, не содержащее ни одного из множеств A_1, A_2, ..., A_n.

2. а) Докажите, что в полном ориентированном графе существует путь, проходящий по одному разу по всем вершинам.

б) В полном ориентированном графе можно добраться по стрелкам из любой вершины в любую другую. Докажите, что в этом графе существует цикл, проходящий по одному разу по всем вершинам.

3. Жители страны Полиглотов разговаривают на 1988 языках. Каждым языком владеет более половины жителей страны. Докажите, что можно выбрать 10 жителей страны так, чтобы каждым из 1988 языков владел хотя бы один из выбранных.

4. В ряд выписано p чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. За одну операцию разрешается сменить знак одновременно у нескольких подряд идущих чисел. За какое наименьшее количество подобных операций любой такой набор можно превратить в набор из одних единиц?

5. В стране 1000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не более 9 дорог и из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно выбрать а) 200 городов, б) 210 городов, в) 222 города так, чтобы не существовало циклического маршрута нечетной длины, проходящего только по выбранным городам.

6. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т. е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно соседние с этой клеткой).

7. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y), для которых $f(x) = g(y)$, через n – число пар, для которых $f(x) = f(y)$, а через k – число пар, для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leqslant n + k$.

8. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 2^n команд. Докажите, что после окончания турнира можно выбрать $n + 1$ команду A_1, A_2, ..., A_{n+1} так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с бо́льшими номерами.