Серия 2(b), повторительно-перечислительная

1. (Теорема Блихфельдта). Докажите, что расположенную на плоскости с целочисленной решеткой фигуру площади S можно параллельно перенести так, чтобы внутрь фигуры попало

а) не более $[S]$ узлов;

б) не менее $[S]$ узлов (а если S не целое, то не менее $[S]+1$).

2. Шахматный конь (обозначенный на рисунке буквой К) может совершать ходы в восьми направлениях. Назовём ходы на клетки, обозначенные цифрой 1, казанскими, а на клетки, обозначенные цифрой 2 – вятскими. Может ли конь обойти шахматную доску, побывав на каждой её клетке ровно по одному разу и последним ходом вернувшись в исходную клетку так, чтобы казанские и вятские ходы чередовались?

	1		2	
2				1
		К		
1				2
	2		1	

3. Прямоугольный город состоит из mn квадратных кварталов: m в длину и n в ширину. Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 2^{mn}.

4. На первый этап Олимпиады по закрытию скобочек пришло 2016 участников. Согласно новому Порядку, если на второй этап прошли a участников, на третий – b участников, а на четвертый – c участников, то $a-b$ должно равняться $b-c$. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, $a \geqslant b \geqslant c$. Сколькими способами жюри олимпиады может выбрать участников этапов согласно новому Порядку? Варианты считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.

5. Аяз выкладывает в ряд 52 карты обычной колоды, 26 красных и 26 чёрных. Если между двумя картами одного цвета нет карт другого цвета, их можно убрать. Сколько существует первоначальных расположений, при которых Аяз сможет убрать все карты?

6. При каких натуральных n квадрат $n \times n$ можно разрезать по клеточкам на прямоугольники (их должно быть больше одного), площадь каждого из которых является степенью двойки так, чтобы среди этих прямоугольников не нашлось двух равных и одинаково расположенных?

7. В классе учатся 45 школьников. Каждый из них на Новый год послал поздравительные SMS-ки хотя бы 23 своим одноклассникам. Оказалось, что ровно 35 из них не получили SMS-ок от тех, кому сами послали SMS. Докажите, что среди остальных 10 школьников любые двое обменялись SMS-ками.

8. В n-элементном множестве M выбрано n различных подмножеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что для некоторого $x \in M$ множества $A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ также различны.