Серия 2(а), с подсчётами.

1. Несколько больших кругов, не проходящих через северный и южный полюса, разбивают сферу на треугольные области. Мы говорим, что область A *не выше* области B, если она лежит к югу от любого большого круга, к югу от которого лежит B. Докажите, что для любых двух областей A и B существует область C такая, что D не ниже C тогда и только тогда, когда D одновременно не ниже A и не ниже B.

2. Каждой вершине пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Если трем последовательным вершинам соответствуют числа x, y, z и $y > 0$, то разрешается следующая операция: числа x, y, z заменяются соответственно на $x+y$, $-y$, $y+z$. Такие операции последовательно совершаются до тех пор, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Определите, обязательно ли этот процесс завершится за конечное число шагов.

3. Существует ли множество точек на плоскости, которое пересекается с любым треугольником площади 1 по конечному непустому подмножеству?

4. Вершины графа G не красятся правильным образом в $k-1$ цвет. Однако существует раскраска его вершин в k цветов, в которой для любого цвета c никакие две вершины, смежные с вершинами цвета c, не смежны между собой. Докажите, что в G хотя бы $k(2^{k-1}-1)$ вершин.

5. На олимпиаде были туры по алгебре, геометрии, теории чисел и комбинаторике. В каждом туре все участники получили разное число баллов. При каком наименьшем N среди любых N участников обязательно найдутся десять, баллы которых на некоторых двух турах упорядочены одинаково (то есть если один из этих десяти превзошёл другого в одном туре, то превзошёл и в другом)?

6. В связном графе степень каждой вершины равна 2016, и его вершины можно покрасить в 2017 цветов правильным образом так, что среди соседей каждой вершины есть все цвета, кроме ее цвета. Сколько вершин может быть в таком графе?

7. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой ℓ, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении ℓ и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

8. 2500 королей расставлены в клетках доски 100×100 так что никакие два короля не бьют друг друга, и в каждом ряду (в столбце или строке) находится ровно 25 королей. Найдите количество таких расстановок.