Серия 2(а): формализм, бюрократия.

1. Пусть $S_n = \{0, 1, 2, \ldots, 4n-1\}$. Подмножество A множества S_n называется *редким*, если для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ выполняются условия:

$$|A \cap \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}| \leqslant 1, |A \cap \{4k-2, 4k-1, 4k, 4k+1, 4k+2\}| \leqslant 2.$$

Докажите, что количество редких подмножеств равно $8 \cdot 7^{n-1}$.

2. Пусть A – конечное множество точек плоскости, каждая из которых покрашена в черный или белый цвет. Множество A называется *неразделимым*, если для любой прямой ℓ, не содержащей точек множества A, найдутся точки разного цвета по одну сторону от ℓ. Пусть M – неразделимое множество, никакие три точки которого не лежат на одной прямой. Докажите, что неразделимых подмножеств M с четным количеством точек на 1 больше, чем с нечетным.

3. Рассмотрим множество из 20 целых чисел $\{\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_{10}\}$. Докажите, что из этого множества можно выбрать непустое подмножество S такое, что никакие два числа $\pm a_i$ не могут оба лежать в S, и сумма всех чисел из S делится на 1001.

4. В обществе из n членов каждое непустое подмножество считается комиссией. В каждой комиссии нужно выбрать председателя, соблюдая правило: если комиссия C является объединением нескольких меньших комиссий, то председателем C должен быть один из председателей этих меньших комиссий. Сколькими способами можно выбрать председателей?

5. X, Y, Z – конечные множества вещественных чисел. Докажите неравенство $|X-Y| \cdot |X-Z| \geqslant |Y-Z| \cdot |X|$. Здесь $X - Y = \{x - y | x \in X, y \in Y\}$, а $|M|$ – число элементов множества M.

6. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{2^n} удовлетворяет соотношению $a_k \leqslant k$. Докажите, что из неё можно выбрать неубывающую подпоследовательность, состоящую из $n+1$ члена.

7. Дано натуральное число $k > 1$. При каком наибольшем n можно окрасить все числа от 1 до n в черный и белый цвета так, чтобы для любых (возможно, совпадающих) $a_1, \ldots, a_{k+1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_{k+1}$, среди a_1, $\ldots$, a_{k+1} нашлись бы числа обоих цветов?

8. Функция $f : \{-1; 1\}^n \to \{-1; 1\}$ обладает следующими двумя свойствами:

(i) $f(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

(ii) если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$, то при замене любого из x_i на y значение функции не изменится.

Функция $g(x_1, x_2, x_3)$ всегда равна тому из чисел, которое чаще встречается в наборе x_1, x_2, x_3. Докажите, что функция f может быть получена последовательным применением функции g к первоначальным переменным и получаемым значениям.