Серия 2, по мотивам.

1. В M-элементном множестве выделили S подмножеств, содержащих $a_1, a_2, \ldots, a_s$ элементов соответственно. Известно, что среди этих подмножеств ни одно не содержится в другом. Докажите, что

$$\frac{1}{\binom{M}{a_1}} + \frac{1}{\binom{M}{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{M}{a_s}} \leqslant 1,$$

где $\binom{M}{a_k} = M!/a_k!(M-a_k)!$.

2. В прямоугольном куске сыра есть несколько круглых дыр. Докажите, что его можно разрезать на выпуклые многоугольники, каждый из которых целиком содержит ровно одну дырку.

3. Прямой угол разбит на бесконечное множество квадратных клеток со стороной 1. Эти клетки последовательно заполняют целыми неотрицательными числами по следующему правилу: если все клетки, лежащие левее или ниже некоторой клетки, заполнены, в неё вписывается наименьшее целое неотрицательное число, которое не встречается в этих клетках. Какое число стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца?

4. Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$, $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$. Найдите число всех таких значений n, для которых $f(n) = n$ и $1 \leqslant n \leqslant 1988$.

5. Пусть n – натуральное число и $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2n+1}$ – подмножества некоторого множества B. Предположим, что

а) каждое множество A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$ содержит ровно $2n$ элементов;

б) каждое множество $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ содержит ровно один элемент;

в) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$.

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел – 0 или 1 – так, чтобы каждое из множеств $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2n+1}$ содержало ровно n элементов, соответствующих числу 0?

6. В городе N семь высотных зданий. Приезжий математик хочет найти точку, из которой они все видны в заданном порядке (считая от штаб-квартиры компании "Фазовое пространство" по часовой стрелке). Для любого ли заданного порядка это возможно?

7. Каждый из трех синих кругов на плоскости пересекается с каждым из трех красных. Докажите, что какие-то два одноцветных круга тоже пересекаются.

8. Сто депутатов образовали 450 комиссий. Каждые две комиссии пересекаются не более чем по трем депутатам, а каждые пять комиссий — не более чем по одному. Докажите, что какие-то четыре комиссии пересекаются ровно по одному депутату.