Серия 2, про π

1. На единичной сфере отмечено несколько дуг, суммарная длина которых меньше π. Докажите, что имеется большой круг, не пересекающийся ни с одной из них.

2. Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого есть.

3. Прямой угол разбит на клетки. На некоторых клетках стоят фишки, причем расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Вначале в угловую клетку ставится одна фишка. Можно ли указанными операциями освободить от фишек уголок из а) десяти, б) шести клеток, примыкающий к вершине угла?

4. Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Доказать, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из точек.

5. Докажите, что

а) каждый выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в треугольник площади 2;

б) вообще говоря, нельзя заключить в треугольник меньшей площади.

6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1) Снять по одному камню с клеток $n-1$ и n и положить один камень в клетку $n+1$;

2) Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n+1$, $n-2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

7. На плоскости даны векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{a_n}$, сумма длин которых равна 1. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $\frac{1}{\pi}$.

8. Дано дерево T с k ребрами. *k-мерным кубом* назовем граф G, вершинами которого являются все 2^k возможных последовательностей длины k из нулей и единиц, а две вершины соединены ребром, если они различаются ровно в одной позиции. Набор ребер k-мерного куба назовем *копией* дерева T, если их можно взаимно однозначно сопоставить ребрам T так, что ребра, имеющие общую вершину, сопоставлены ребрам, имеющим общую вершину в T, и наоборот.

Докажите, что все ребра k-мерного куба можно разбить на несколько копий дерева T.