Серия 1(b): проверка базовых комбинаторных навыков.

1. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, $\ldots$, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

2. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Три козлёнка: Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур – по очереди (начинает Алюль, затем ходит Булюль, а потом Хиштаки Саританур и далее по циклу) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Может ли какой-нибудь козлёнок играть так, чтобы выиграть, как бы ни играли два других?

3. В проекте "Нам важен каждый" принимают участие k человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Продолжительность проекта – n дней. При каком наибольшем k организаторы проекта наверняка смогут выгнать всех участников?

4. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой ℓ, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении ℓ и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

5. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a \times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c \times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a \times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c \times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

6. Шахматный конь повредил ногу и теперь хромает: он чередует обычные ходы и "короткие", при которых он перемещается на соседнюю по диагонали клетку. Хромой конь начинает движение по доске 5×100 с нормального хода (и сам выбирает начальную клетку). Какое наибольшее число ходов он может сделать, не посещая ни одну клетку, в том числе, и начальную, больше одного раза?

7. Все клетки доски $(2n+1)\times(2n+1)$ раскрашены в чёрный и белый цвета. Мы говорим, что клетка *доминирует* в своей строке или своём столбце, если клеток её цвета там больше половины. Какое наименьшее количество клеток может доминировать одновременно в строке и столбце?

8. На окружности отмечено 30 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Верно ли, что для любой начальной раскраски отрезков можно их все сделать одноцветными с помощью указанных операций?