Серия 1(b): разыграем стандарты.

1. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашку весов каждую гирю, на которой написана его фамилия. Докажите, что можно впустить в класс таких учеников, чтобы в результате перевесила не та чашка весов, которая перевешивала вначале.

2. В клетках бесконечной шахматной доски расставлено m фишек. Для каждой фишки вычисляется произведение количества фишек в ее строке на количество фишек в ее столбце. Докажите, что количество фишек, для которых это число не меньше $10m$, не превосходит $m/10$.

3. На плоскости отмечены 2019 различных точек. Они покрашены в красный и синий цвета так, что от каждой синей точки на расстоянии 1 находятся хотя бы 2 красных. Докажите, что красных точек больше 40.

4. В группе из $2n+1$ человек среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее $n+1$ человек из этой группы, у каждого из которых не менее n друзей.

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями: $a_1 = 3$, $a_n = n(a_{n-1} - 1) + 2$. Докажите, что в графе с a_n вершинами, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.

6. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

7. Назовём ориентированный граф *k-дольным*, если его вершины разбиваются на множества A_1, $A_2, \ldots, A_k$ так, что конец каждого ребра с началом в A_i принадлежит A_{i+1} (мы считаем $A_{k+1} = A_1$). Докажите, что граф является k-дольным тогда и только тогда, когда в любом неориентированном цикле (цикле, составленном из рёбер без учёта направления) разность количеств рёбер, идущих в одном и другом направлениях, кратна k.

8. n школьников занимаются в кружках. В каждом кружке состоят ровно 5 человек. Для любых двух школьников существует не более одного кружка, в котором занимаются они оба. Докажите, что количество кружков не более $\frac{n^2}{20}$.