Серия 1(а): комбинаторика с арифметическим уклоном.

1. (Шур) Натуральные числа, не превосходящие $k!e$, раскрашены в k цветов. Докажите, что существуют три числа одного цвета, одно из которых равно сумме двух других.

2. Даны простое p и натуральные a_1, a_2, $\ldots$, a_p. Докажите, что числа a_1, a_2, $\ldots$, a_p образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда можно разбить множество целых неотрицательных чисел на n множеств A_1, A_2, $\ldots$, A_p так, что

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \ldots = a_p + A_p.$$

3. Докажите, что все пятизначные числа, получающиеся перестановкой цифр 1, 2, 3, 4, 5, можно разбить на две группы, в которых суммы квадратов чисел равны.

4. Множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ разбито на k подмножеств, причём $k^3 + 1 \leqslant n$. Докажите, что существуют натуральные a_1, a_2, $\ldots$, a_{k+1} такие, что числа $2a_1$, $2a_2$, $\ldots$, $2a_{k+1}$ принадлежат одному множеству разбиения, и числа $2a_1 - 1$, $2a_2 - 1$, $\ldots$, $2a_{k+1} - 1$ тоже принадлежат одному множеству разбиения.

5. S – количество 33-элементных подмножеств множества $H = \{1, 2, \ldots, 2009\}$ с четной суммой элементов, а N – количество подмножеств с нечетной суммой. Какое из чисел S и N больше?

6. На доске написано число $2^{2015} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2017}$. Два игрока делают ходы по очереди. Ход состоит в том, чтобы разложить любое из написанных на доске чисел на два множителя, имеющих общий делитель, больший 1, стереть число с доски и написать два полученных множителя. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

7. По кругу стоят 2^n хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно от испуга перекрашиваются в другой цвет: синие – в красный, красные – в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что рано или поздно все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.

8. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит а) 0,34; б) 0,287. (Можно считать, что граница фигуры, о которой говорится в условии, состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.)