

### Серия 1: раскраски графов и полезный метод.

1. В графе со 100 вершинами нет трех вершин, попарно соединенных ребрами. Степень каждой его вершины больше 40. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета правильным образом.

2. Среди любых  $2d + 2$  вершин графа можно выбрать  $d$  таких, что каждое ребро, соединяющее две из этих  $2d + 2$  вершин, содержит хотя бы одну из выбранных. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в  $d + 1$  цвет так, чтобы концы каждого ребра были разноцветными.

3. Дано конечное семейство множеств, каждое из которых содержит хотя бы  $k^2$  элементов (число  $k \geq 2$  натурально). Любые два множества пересекаются, причём не больше, чем по  $k - 1$  элементу. Докажите, что все элементы можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакое множество не оказалось одноцветным.

4. Назовём ориентированный граф  $k$ -дольным, если его вершины разбиваются на множества  $A_1, A_2, \dots, A_k$  так, что конец каждого ребра с началом в  $A_i$  принадлежит  $A_{i+1}$  (мы считаем  $A_{k+1} = A_1$ ). Докажите, что граф является  $k$ -дольным тогда и только тогда, когда в любом неориентированном цикле (цикле, составленном из рёбер без учёта направления) разность количеств рёбер, идущих в одном и другом направлениях, кратна  $k$ .

5. На ветвях большого дуба сидят несколько ворон. По сигналу они начинают пересаживаться. Каждую минуту одну из ворон прогоняют соседки, сидящие на той же ветке, и эта ворона перелетает на следующую по высоте (более высокую) ветку; если сверху веток нет, ворона улетает. Все ветки расположены на различной высоте. Докажите, что время, через которое процесс закончится (т. е. на каждой ветке будет не более одной вороны), не зависит от порядка перелетов, а зависит только от начального расположения ворон.

6. По окружности расставлены целые числа. Разрешается делать следующее: стереть любое четное число, после чего заменить соседние с ним числа на их сумму ( $\dots x \ 2y \ z \dots \rightarrow \dots x + z \dots$ ). Такие операции производятся до тех пор, пока на окружности либо не останется ни одного четного числа, либо количество чисел станет равным 1 или 2. Докажите, что количество чисел, оставшихся на окружности, не зависит от способа действия, а зависит лишь от исходной расстановки чисел.

7. Дан правильный 2003-угольник. Его вершины покрашены в два цвета: 500 из них – в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа покраски.

8. Ребра полного графа на 2003 вершинах раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдутся либо 600 непересекающихся по вершинам треугольников с ребрами красного цвета, либо 101 непересекающийся по вершинам треугольник с ребрами синего цвета.