Серия 1: перестановки и пр.

1. Умножение всех ненулевых вычетов по простому модулю p на некоторое $a \not\equiv 0 \pmod p$ производит в этом множестве перестановку. Докажите, что эта перестановка

а) чётная, если a – квадратичный вычет, и

б) нечётная, если a – квадратичный невычет.

2. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ называется *хорошей*, если среди разностей $a_1 - 1$, $a_2 - 2$, …, $a_n - n$ нет двух равных. Докажите, что количество хороших перестановок нечетно.

3. Дано натуральное n. Назовем $(n+1)$-элементное подмножество A множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ *нескладным*, если для любых различных $a, b, c \in A$ выполнено $a + b \neq c$. Найдите количество нескладных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$.

4. а) Проекции многоугольника на ось OX, биссектрису первого и третьего координатных углов, ось OY, биссектрису второго и четвертого координатных углов равны соответственно 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника равна S. Докажите, что $S \leqslant 17,5$.

б) В дополнительном предположении, что многоугольник выпуклый, покажите, что $S \geqslant 10$.

5. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в множестве $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, чтобы ни одно из выбранных множеств не содержалось в другом и никакие два не давали в объединении $\mathcal{S}$?

6. На полке в беспорядке стоит 100-томная энциклопедия, один из томов которой – в красном переплете. Красный том можно поменять местами с любым другим. Какого наименьшего количества таких обменов заведомо хватит, чтобы расставить тома по порядку?

7. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла (“вертикальные” и “горизонтальные” ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

8. а) Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что существует натуральное число, равное сумме двух чисел одного с ним цвета.

б) Международное сообщество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, …, 1978.

Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.