Серия 1, общекомбинаторная

1. Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_{d+1}$ – семейства конечных множеств, каждое из которых содержит не более d элементов. Известно, что для всякого набора $X_1 \in \mathcal{F}_1$, $X_2 \in \mathcal{F}_2$, ..., $X_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$ пересечение $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{d+1}$ не пусто. Докажите, что для некоторого i пересечение всех множеств семейства $\mathcal{F}_i$ непусто.

2. Дано натуральное n. Назовём *словом* последовательность из n букв алфавита, а *расстоянием* $\rho(A, B)$ между словами $A = a_1a_2 \ldots a_n$ и $B = b_1b_2 \ldots b_n$ – количество разрядов, в которых они отличаются (то есть количество таких i, для которых $a_i \neq b_i$). Мы скажем, что слово C *лежит между словами* A *и* B, если $\rho(A, B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы среди любых трёх нашлось слово, лежащее между двумя другими?

3. Дано натуральное $\ell \geqslant 2$ и натуральные числа $k < n$. Известно, что в графе G степень каждой вершины лежит в интервале $[n, \ell n]$. Докажите, что у G найдётся подграф H на тех же вершинах такой, что степени всех его вершин лежат в интервале $[k, \ell k]$.

4. Степень каждой вершины графа не менее 3. Докажите, что в этом графе существует цикл, длина которого не делится на 3.

5. Существует ли квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального n количество различных простых делителей $f(n)$ ровно вдвое больше количества различных простых делителей n?

6. На плоскости даны n точек, не лежащих на одной прямой, и проведены всевозможные прямые через все пары данных точек. Докажите, что получилось не менее n прямых.

7. n прямых общего положения делят плоскость на части. Докажите, что можно расставить в этих частях

а) ненулевые целые числа,

б) ненулевые целые числа, по модулю не превосходящие n,

так, что с каждой стороны от каждой исходной прямой сумма чисел равна нулю.

8. Можно ли расположить на плоскости 7 точек так, что для любой нумерации этих точек найдётся некоторая точка X на плоскости такая, что из неё эти 7 точек видны именно в порядке данной нумерации, если смотреть из точки X на первую по нумерации точку и далее поворачиваться по часовой стрелке?