Вступительные задачи, группа Junior

1. Пусть a - угловая клетка шахматной доски 8×8, b – соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску "хромой ладьей", начиная с клетки a, больше, чем число способов обойти всю доску "хромой ладьей", начиная с клетки b. ("Хромая ладья" ходит по доске на одну клетку по вертикали или горизонтали. Ладья должна побывать на каждой клетке доски ровно один раз.)

2. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2019? (Сначала доска была чистой.)

3. В таблице 2017×2018 расставлены числа 0, 1, 2 так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице?

4. Пусть $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, где $\frac{a_n}{b_n}$ – несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, при которых выполнено неравенство $b_{n+1} < b_n$.

5. В выпуклом n-угольнике провели несколько диагоналей (возможно, пересекающихся) так, что ни в какой точке внутри многоугольника не пересеклись три или более диа- гоналей. Оказалось, что в результате многоугольник разбился на треугольники. Каково наибольшее возможное число треугольников?

6. Дана клетчатая полоса $1 \times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. Докажите, что произвольные N^2 попарно различных натуральных чисел ($N > 10$) можно расположить в таблице $N \times N$ так, чтобы все $2N$ сумм по строкам и по столбцам были различны.

8. Прямоугольник на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 разбит на фигурки домино (прямоугольники, состоящие из двух клеток с общей стороной). Докажите, что все вершины клеток на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждых двух вершин, находящихся на расстоянии 1, выполнялось следующее условие: эти вершины разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае.

9. На вечеринку собрались несколько мальчиков и несколько девочек. После вечеринки выяснилось, что для каждой пары девочек есть ровно три мальчика, которые танцевали и с той, и с другой, а для каждой пары мальчиков есть ровно три девочки, которые танцевали и с тем, и с другим. Докажите, что на вечеринке было поровну мальчиков и девочек.

10. Среди натуральных чисел a, не превосходящих n, выбрали все, для которых n взаимно просто с обоими числами a и $a+1$. Докажите, что количество выбранных чисел равно $n\left(1 - \frac{2}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{2}{p_k}\right)$, где p_1, p_2, $\ldots$, p_k – все простые делители n.