Вступительные задачи, группа B

1. В некоторой стране из каждого города выходит по крайней мере одна дорога (каждая дорога соединяет ровно два города). Город назовем *захолустным*, если из него выходит ровно одна дорога. В стране нельзя выйти из какого-то города и, пройдя по замкнутому маршруту, вернуться в исходный. Города страны разбиты на две части так, что никакие два города в одной части не соединены дорогой. Пусть в первой части городов не меньше, чем во второй. Докажите, что в первой части есть захолустный город.

2. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не более 100 дорог. Набор дорог называется *идеальным*, если эти дороги не имеют общих концов, но больше ни одной дороги с сохранением этого условия добавить к этому набору нельзя. Министерство транспорта каждый день выбирает какой-нибудь идеальный набор дорог и полностью разрушает их. Новых дорог министерство не строит. Докажите, что не более чем через 199 таких операций в стране вообще не останется дорог.

3. В вершинах 50-угольной призмы расставлены числа 1, 2, 3, ..., 100. Докажите, что у призмы найдется такое ребро, что стоящие в его концах числа различаются не более чем на 48.

4. Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел – 0, 1 или 2 – совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?

5. Фишка может находиться в одной из 169 точек $(x; y)$, где x и y – целые числа, $0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 12$. Фишка может пойти из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2), только если каждое из чисел $|x_1 - x_2|, |x_1 - y_2|, |y_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$ не меньше двух и не больше девяти. Докажите, что фишка не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно по разу.

6. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

7. Существует ли бесконечная чисто периодическая последовательность, состоящая из букв a и b, такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и букв b на bba она переходит в себя (возможно, со сдвигом)?

8. Назовем "сочетанием цифр" несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.

9. На поле h8 шахматной доски – стопка из n различных шашек. Шашки разрешено снимать со стопки и двигать по доске на одно поле вниз или влево. При этом запрещается ставить одну шашку на другую на любом поле, кроме поля a1. При каком максимальном n из исходной стопки шашек на поле h8 можно получить любую стопку на поле a1 (имеется в виду порядок шашек в стопке)?

10. Можно ли расставить на торической доске 15×15 клеток 15 ферзей, не бьющих друг друга?