**Вступительные задачи, группа А**

1. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

2. В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо?

3. Дан квадрат $N \times N$. Его клетки красят в $N$ цветов так, что в каждой строчке и каждом столбце цвета всех клеток разные. Никакие четыре клетки, лежащие на пересечении любых двух строк и двух столбцов, не могут быть покрашены ровно в три цвета. Чему может быть равно $N$?

4. Вершины графа разбиты на три множества $A$, $B$, $C$ так, что вершины из $A$ не связаны рёбрами с вершинами из $C$. Известно, что $A \cup B$ можно правильно раскрасить в $k$ цветов, а $B \cup C$ – в $n$ цветов. В какое минимальное количество цветов можно с гарантией правильно раскрасить все вершины этого графа?

5. Дан выпуклый $n$-угольник, $n \geqslant 4$. Найдите количество способов провести $n-3$ диагонали так, чтобы никакие две из них не пересекались во внутренней точке $n$-угольника и чтобы никакие три из них не образовывали треугольник.

6. Имеется несколько карточек, на каждой карточке написано некоторое слово. Карточки разложены в два ящика так, что в начальный момент в первом ящике карточек больше, чем во втором. Разрешается сделать следующую операцию: назвать некоторую букву, и каждую карточку со словом, содержащим эту букву, переложить из ящика, в котором она находилась, в другой ящик. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы во втором ящике карточек стало больше, чем в первом.

7. На координатной плоскости расположен выпуклый многоугольник $M$. Известно, что в него можно поместить отрезок длины $a$, параллельный оси $Ox$, и отрезок длины $b$, параллельный оси $Oy$. Докажите, что в многоугольник $M$ можно поместить квадрат со стороной $\frac{ab}{a+b}$.

8. В клетках квадрата $30 \times 30$ расставлены натуральные числа, не превосходящие 250. Докажите, что существует невырожденный параллелограмм с вершинами в центрах клеток, суммы чисел в противоположных вершинах которого равны.

9. В группе людей в любой ее подгруппе из не менее, чем $(2n-2)$ человек, найдутся $n$ попарно знакомых. Докажите, что из группы можно удалить не более чем $(n-2)$ человека так, что все оставшиеся люди будут знакомы между собой.

10. В книжном шкафу на нескольких полках стояли книги, при этом хотя бы одна из полок была пустой. Эти книги переставили так, что теперь на каждой полке стоит хотя бы одна книга. Докажите, что найдется книга, на одной полке с которой теперь стоит меньше книг, чем до перестановки.