Вступительные задачи, группа IMO

1. Даны 12 вещественных $x_1, \ldots, x_{12}$, каждое из которых больше 1. На числовой прямой отмечаются точки, соответствующие числам вида $\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_{12}$. Докажите, что ни на какой отрезок длины 2 не может попасть больше 1000 отмеченных точек.

2. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ называется *хорошей*, если среди разностей $a_1 - 1$, $a_2 - 2$, …, $a_n - n$ нет двух равных. Докажите, что количество хороших перестановок нечетно.

3. Пусть p – простое число вида $4t + 1$, а (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_k, b_k) – все пары натуральных чисел (a, b), для которых $a < b \leqslant \frac{p-1}{2}$ и $a^2 + b^2$ кратно p. Докажите, что

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

4. При каких натуральных n в клетках таблицы $n \times n$ можно расставить числа -1, 0 и 1 так, чтобы во всех строках и столбцах суммы чисел были различны?

5. Можно ли разместить на плоскости 100 кругов $D_2, D_3, \ldots, D_{101}$ так, чтобы для любых различных a и b, больших 1 и не больших 101, круги D_a и D_b не пересекались, если $(a, b) = 1$, и круг D_a содержал круг D_b, если a делится на b?

6. Пусть $\leftarrow$ означает соответствующую клавишу на клавиатуре. Если открыть текстовый редактор и последовательно нажать клавиши “ab←cd←←e←←f”, то получится “faecdb”. Назовём строку B *достижимой* из строки A, если можно вставить в A несколько $\leftarrow$ так, что после вбивания получится строка B. Докажите, что B достижима из A тогда и только тогда, когда A достижима из B.

7. В полном графе на n вершинах ориентировали ребра так, что нет ориентированного цикла на 4 вершинах. Какое максимальное число ориентированных циклов на 3 вершинах может быть?

8. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, …, n. Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.

9. Даны $2^k + 1$ натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{2^k+1} (k – натуральное). Докажите, что в разложениях на простые множители их попарных сумм $a_i + a_j$, $i \neq j$, встречается не менее $k + 1$ разных простых чисел.

10. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно а) делится на 12!; б) делится на 13!.