Вступительные задачи

1. Пусть a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n, $\ldots$– бесконечная последовательность целых чисел, где никакое число не встречается дважды и $a_n + b_n = n$ при всех n. Докажите, что в последовательности $a_1/1$, $b_1/1$, $a_2/2$, $b_2/2$, $\ldots$, a_n/n, b_n/n, $\ldots$бесконечно много чисел, больших а) 7/5; б) 8/5; в) 1,7; г) 13/7.

2. а) Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2020}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_{2018}a_{2020}),$$

если a_1, a_2, $\ldots$, a_n – целые числа и $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2020} = 99$?

б) Сколько существует наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_{2020})$, для которых принимается это значение?

3. Полный граф на n вершинах покрыт $n+1$ путём так, что каждое ребро принадлежит ровно одному пути. Докажите, что существуют два пути, либо не имеющих общих вершин, либо имеющих хотя бы две общих вершины.

4. Для натурального n, не делящегося на 3, обозначим через $C(n)$ наибольшее количество k целых чисел a_1, $\ldots$, a_k, которые можно выбрать так, чтобы при любых индексах $i \neq j$ и любом натуральном s число $3^s a_i - a_j$ не делилось на n. Докажите, что число $C(3d+1) + C(3d+2)$ нечётно при любом натуральном d.

5. Несколько полицейских ловят вора, у которого есть $2m$ сообщников. Для этого полицейские организуют слежку за сообщниками. В начале полицейские ни за кем не следят. Каждый день утром каждый полицейский добавляет в список тех, за кем он следит, одного сообщника. Каждый день вечером вор теряет доверие к одному из своих сообщников. Вор будет пойман, если вечером m-го дня кто-то из полицейских будет следить ровно за теми m сообщниками, которым к этому времени вор все еще доверяет. Докажите, что для гарантированной поимки вора требуется не менее 2^m полицейских.

6. По кругу расставлены $3n$ красных точек ($n > 1$ – натуральное число). Каждую минуту Иван соединяет отрезком какие-нибудь две ещё не соединённые точки, а Митрофан перекрашивает какую-нибудь красную точку в зелёный цвет. Докажите, что, как бы ни ходил Митрофан, Иван может добиться, чтобы через n минут не менее $\frac{n-1}{6}$ отрезков соединяли красные точки с зелёными.

7. На плоскости нарисовано 100 одинаковых непрозрачных непересекающихся кругов. Докажите, что из некоторой точки видно не менее десяти из них.

8. На окружности расположено множество F точек, состоящее из n дуг. Известно, что при любом повороте R окружности множество $R(F)$ имеет общую точку с F. (Другими словами, для любого α от 0° до 180° в множестве F можно указать две точки, отстоящие друг от друга на α.) Какую наименьшую сумму длин могут иметь n дуг, образующих множество F?

9. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств n-элементного множества X. Известно, что любое множество в $\mathcal{F}$ имеет некратную трём мощность, и и вместе с любыми двумя множествами $\mathcal{F}$ содержит их пересечение. Кроме того, любая пара элементов из X лежит хотя бы в одном множестве из $\mathcal{F}$. Докажите, что n не делится на 3.

10. Обозначим через S_n множество всех слов длины n из букв 0, 1 и $*$. Для слов $x, y \in S_n$ скажем, что $x \preceq y$, если y получается из x заменой некоторых звёздочек на единицы и нули.

Функция $f\colon S_{n+k} \to S_n$ такова, что

(1) $x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$;

(2) $f(***\ldots*) = **\ldots*$;

(3) если $f(x) \preceq z$, то существует $y \succeq x$ такое, что $f(y) = z$.

Докажите, что существует слово x, содержащее не более n звёздочек, такое, что $f(x) = **\ldots*$.