1. Все рёбра полного графа с $2k+\ell-1$ вершинами (k и $\ell \leqslant k$ – натуральные числа) раскрашены в красный и синий цвет.

а) Докажите, что в нём найдутся k попарно непересекающихся красных рёбер или ℓ попарно непересекающихся синих рёбер.

б) Докажите, что число $2k+\ell-1$ в этой задаче нельзя уменьшить.

2. Дано семейство $\mathcal{F}$ конечных множеств, каждое из которых состоит из $2n$ элементов. Любой набор множеств из $\mathcal{F}$, объединение которых содержит не более $(n+1)^2$ элементов, имеет непустое пересечение. Докажите, что у всех множеств из $\mathcal{F}$ есть непустое пересечение.

3. Дано конечное семейство конечных множеств $\mathcal{F}$. Каждому множеству $X \in \mathcal{F}$ сопоставлено натуральное число $a(X)$ так, что для всякого непустого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

$$|\bigcup_{X\in\mathcal{G}} X| \geqslant \sum_{X\in\mathcal{G}} a(X).$$

Докажите, что можно одновременно для каждого множества $X \in \mathcal{F}$ выбрать подмножество $Y_X \subseteq X$, для которого $|Y_X| = a(X)$ так, что все множества Y_X, $X \in \mathcal{F}$, попарно не пересекаются.

4. В каждой клетке квадратной таблицы записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a=b$.

5. На бесцветной плоскости отметили три произвольные точки: красную, синюю и желтую. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки разного цвета и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке ¡¡красный, синий, желтый¿¿ (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может быть покрашена одновременно в несколько цветов.) Докажите, что сколько бы ходов не было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой.

6. Пусть n – составное число. Числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ – все числа из множества $\{1,2,3,\ldots,n\}$, не взаимно простые с n. Пусть $b_1,\ldots,b_k$ – перестановка чисел $a_1,\ldots,a_k$. Докажите, что найдутся индексы i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ такие, что a_ib_i и a_jb_j дают одинаковые остатки при делении на n.

7. Пусть n – натуральное число. Докажите, что числа

$$C^0_{2^n-1}, C^1_{2^n-1}, C^2_{2^n-1}, \ldots, C^{2^{n-1}-1}_{2^n-1}$$

сравнимы по модулю 2^n с числами 1, 3, 5, …, 2^n-1 в некотором порядке.

8. Каждой точке X плоскости сопоставлено число $r(X)>0$ так, что $|r(X)-r(Y)| \leqslant |XY|/2$ для любых точек X, Y. Известно, что существует непустое множество точек A, обладающее следующим свойством: если даны произвольная точка Y и произвольная точка $X \in A$ такие, что $|XY| = r(X)$, то $Y \in A$. Докажите, что A совпадает со всей плоскостью.

9. Назовём многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами C-*малозначным*, если для любого натурального n число $p(n^2)$ не делится ни на одно простое число. большее $2n+C$. Найдите все многочлены, являющиеся C-малозначными хотя бы при одном натуральном C.

10. На плоскости расположено несколько точек красного, синего и зеленого цветов. Оказалось, что сумма расстояний между красными и синими точками равно 100, между красными и зелеными – 111, а между синими и зелеными – 1. Докажите, что точек одного из цветов не менее 10.