

**Серия 9(d): геометрические неравенства и кое-что по мелочи.**

1. Докажите, что количество решений уравнения  $x^3 + y^2 = z^3 + t^2 + 1$  в натуральных числах, не превосходящих  $10^6$ , меньше, чем количество решений уравнения  $x^3 + y^2 = z^3 + t^2$  в натуральных числах, не превосходящих  $10^6$ .
2. Дан четырехугольник со сторонами  $a, b, c, d$  (последовательно). Докажите, что его площадь не превосходит:  
а)  $(ab + cd)/2$ ; б)  $(ac + bd)/2$ .
3.  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что  $MN \leq \frac{1}{2}(BC + AD)$ .
4. На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 построен треугольник  $ABC$  с вершинами в узлах. Докажите, что если  $AB > AC$ , то  $AB - AC > 1/P$ , где  $P$  – периметр треугольника  $ABC$ .
5. Существует ли треугольник, у которого а) все высоты меньше 1, а площадь больше 100? б) две высоты больше 100, а площадь меньше 1?
6. В треугольнике  $ABC$  все углы больше  $45^\circ$ . На стороне  $AB$  выбрали точку  $K$ . Точки  $X$  и  $Y$  симметричны  $K$  относительно сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что  $XY > AB$ .
7. На гипотенузу  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  опущена высота  $AF$ . Равнобедренные прямоугольные треугольники  $CFD$  и  $BFE$  с прямыми углами  $C$  и  $B$  расположены вне треугольника  $ABC$ . Точка  $R$  – середина отрезка  $DE$ . Докажите, что  $RF \geq AF$ .