

Серия 9(с): комбинаторной геометрии вам напоследок.

1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120^\circ$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке M , а биссектриса угла, смежного с углом BCA , пересекает прямую AB в точке P . Отрезок MP пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что $\angle AKM = \angle KPC$.
2. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.
3. В выпуклом пятиугольнике выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что в него попадут обе выбранные точки.
4. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем *хорошей*. Докажите, что хороших вершин не менее трех.
5. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.
6. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т. е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.