

Серия 9(b): игры и развлечения.

1. На острове Новая Вавилония используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно, при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.

2. В компании из ста человек среди любых десяти есть трое попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать восьмерых из них так, чтобы любой из оставшихся был знаком с кем-то из этих восьмерых.

3. На Марсе есть 2017 стран и более 2017 городов. Из каждого марсианского города выходит ровно 2016 дорог, соединяющих этот город с городами всех остальных стран. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до любого другого города. Докажите, что существует замкнутый маршрут, проходящий (по одному разу) не менее чем через 4032 городов.

4. Под куполом цирка летают красные, синие и зеленые воздушные шары – по 150 каждого цвета. Внутри каждого синего шара находится ровно 13 зеленых, внутри каждого красного – ровно 5 синих и ровно 19 зеленых. Докажите, что какой-то зеленый шарик не содержится ни в одном из 449 остальных шаров.

5. В связном графе $2n$ вершин, причем все они степени 3. Докажите, что можно так выбрать $n + 1$ ребер, чтобы правильная раскраска в 3 цвета выбранных ребер однозначно задавала правильную раскраску в 3 цвета всех ребер графа (раскраска правильная, если два ребра с общей вершиной имеют разные цвета).

6. На координатной плоскости проведена 101 прямая и отмечены все точки их пересечения друг с другом. Может ли быть так, что на каждой из проведенных прямых лежат 50 отмеченных точек с положительными первыми координатами и 50 — с отрицательными?

7. Число N равно произведению 200 различных натуральных чисел. Докажите, что N имеет не меньше 19901 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).