

**Серия 8(d), в которой больше геометрии, чем может показаться.**

1. **Определение.** Ряд Фарея  $\Phi_n$  – последовательность расположенных по возрастанию несократимых дробей  $\frac{a}{b}$  с  $0 \leq a \leq b \leq n$ .

Медианта дробей  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  – дробь  $\frac{a+c}{b+d}$ .

а) Докажите, что ряд  $\Phi_n$  получается из ряда  $\Phi_{n-1}$  вставкой медиант между соседними дробями с суммой знаменателей  $n$ .

б) Докажите, что для двух дробей  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ , стоящих рядом в каком-нибудь ряду Фарея,  $|ad - bc| = 1$ .

2. Пусть  $a, b, c, d$  – такие целые числа, что система уравнений  $ax + by = m$ ,  $cx + dy = n$  при любых целых  $m$  и  $n$  имеет решение в целых числах. Докажите, что  $ad - bc = \pm 1$ .

3. Выпуклый многоугольник с площадью  $S$  содержится в квадрате с площадью  $a^2$ . Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины  $S/a$ .

4. Выпуклый 17-угольник разбит диагоналями на меньшие многоугольники. Какое наибольшее число сторон может оказаться у многоугольника разбиения?

5. а) Через данную точку  $A$  проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения этой прямой с данной прямой  $\ell$  и данной окружностью  $S$ , делился в точке  $A$  пополам.

б) Даны хорды  $AB$  и  $CD$  окружности. Найдите на ней такую точку  $X$ , чтобы хорды  $AX$  и  $BX$  высекали на  $CD$  отрезок  $E'F'$ , имеющий данную длину  $a$ .

6. Какое наибольшее количество точек можно расставить на отрезке длины 1 так, чтобы на любом отрезке длины  $d$  оказалось не более  $1000d^2 + 1$  точек?

7. Правильный 400-угольник разрезан на параллелограммы. Докажите, что среди этих параллелограммов есть не менее 100 прямоугольников.

8. На одну из сторон угла, образованного двумя зеркалами, падает луч. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз.