Серия 8(с), покороче

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, а внутри треугольника AMD – точка N таким образом, что $\angle MNA + \angle MCB = \angle MND + \angle MBC = 180^\circ$. Докажите, что прямые MN и AB параллельны.

2. В треугольнике ABC $(AB < BC)$ точка I – центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

3. Центры трех непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из центра каждой окружности проведены касательные к двум другим окружностям, проходящие между ними. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.

4. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Прямая ℓ касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная прямой ℓ, касается S_2 в точке C и пересекает S_1 в двух точках. Докажите, что точки A, F и C лежат на одной прямой.

5. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ средняя линия, параллельная стороне BC, пересекается со вписанной окружностью в точке F, не лежащей на основании AC. Докажите, что касательная к окружности в точке F пересекается с биссектрисой угла C на стороне AB.