Серия 8(b): должны были быть неравенства.

1. Множество состоит из n элементов. Для любой пары (упорядоченной) его подмножеств A, B подсчитано число элементов в пересечении $A \cap B$, а затем все эти числа просуммированы. Докажите, что сумма всех чисел равна $4^{n-1}n$.

2. В графе на n вершинах нет треугольников. Докажите, что в нём не более $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ рёбер.

3. Для положительных чисел докажите неравенство: а) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant a + b + c$; б) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$.

4. Числа a, b, $c > -3/4$, а их сумма равна 1. Докажите, что $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{9}{10}$.

5. Для любых положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n докажите неравенства а) $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; б) $\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$.

6. Вещественные числа A, B и C лежат в отрезке $[0;1]$. Докажите, что $\frac{A}{1+BC} + \frac{B}{1+AC} + \frac{C}{1+AB} \leqslant 2$.

7. Докажите, что для любых x, y, z из отрезка $[0;1]$ выполнено неравенство $3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-2xyz(x+y+z) \leqslant 3$.